



# **Thèse de Doctorat de l'Université de Reims Champagne-Ardenne**

*Pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE**

*Spécialité : Mécanique*

*Présentée et Soutenue Publiquement  
par*

**Achraf TAFLA**

Le 26 / 01 / 2007

*Sujet :*

**ELEMENTS FINIS MIXTES-HYBRIDES NATURELS SANS FACTEURS CORRECTIFS  
DU CISAILLEMENT POUR LES PLAQUES ET LES COQUES COMPOSITES  
MULTICOUCHES**

## **JURY**

K. Debray	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Président
A. Benjeddou	Professeur, l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris-Supméca.	Rapporteur
Z. Aboura	Maître de conférences HDR, Université Paris 8	Rapporteur
R. Ayad	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne	Directeur de thèse
R. Younes	MDR HDR, Université Libanaise	Co-directeur
M.S. Bouabdallah	Dr. Enseignant-Chercheur, Pôle Universitaire Léonard De Vinci	Examineur

## Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Groupe de Mécanique des Matériaux et des Structures, de l'Université de Reims Champagne-Ardenne.

Je tiens à exprimer ma gratitude à mes directeurs de thèse, le Professeur Rezak AYAD (URCA) pour m'avoir permis d'entreprendre ce travail de recherche, pour la confiance qu'il m'a accordé en m'accueillant dans son équipe, et Monsieur Rafik YOUNES (Maître de conférences HDR de l'Université Libanaise) pour les encouragements qu'il m'a donnés le long de ce travail.

Je suis particulièrement reconnaissant à :

Monsieur Ayech BENJEDDOU, Professeur à SUPMECA et Monsieur Zoheir ABOURA, Maître de conférences HDR à l'IUT de Tremblay en France (Université Paris 8), pour avoir accepté de juger mon travail,

Monsieur Karl DEBRAY, Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne, pour avoir présidé le jury,

Monsieur Mohamed Salim BOUABDALLAH pour l'intérêt qu'il a apporté à ce travail en acceptant de participer au jury,

Monsieur Nabil TALBI pour l'intérêt qu'il a apporté à ce travail en le suivant de très près.

Mes remerciements vont aussi à :

- Mes amis au Liban pour leurs conseils fructueux et judicieux et leurs encouragements
- Mes parents pour leurs sacrifices et leur soutien moral qu'ils m'ont apporté tout au long de ce travail.

## TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS.....	1
NOTATIONS.....	6
LISTE DES FIGURES.....	7
LISTE DES TABLEAUX.....	10
RESUME.....	12

### CHAPITRE 1

#### INTRODUCTION GENERALE

<b>1.1. SYNTHÈSE SUR LA MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DES PLAQUES ET DES COQUES COMPOSITES.....</b>	<b>13</b>
<i>1.1.1. Les matériaux composites .....</i>	<i>13</i>
<i>1.1.2. Evolution des théories aux éléments finis pour la modélisation des composites multicouches.....</i>	<i>16</i>
<i>1.1.3. Eléments finis et facteurs de correction du CT .....</i>	<i>17</i>
<i>1.1.4. Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur .....</i>	<i>19</i>
<i>1.1.5. Modèles mixte-hybrides de premier ordre .....</i>	<i>22</i>
<b>1.2 OBJECTIF DE LA THÈSE .....</b>	<b>25</b>
<b>1. 3. PLAN DE LA THÈSE .....</b>	<b>26</b>

### CHAPITRE 2

#### FORMULATION DU MODÈLE DE PLAQUE MIXTE-HYBRIDE MULTICOUCHE SANS FACTEURS CORRECTIFS DE CT

<b>2.1. RAPPEL SUR LA THÉORIE DES PLAQUES DU PREMIER ORDRE .....</b>	<b>28</b>
<i>2.1.1. Hypothèses cinématiques et mécaniques.....</i>	<i>28</i>
<i>2.1.2. Géométrie et efforts résultants d'une plaque .....</i>	<i>28</i>
<i>2.1.3. Cinématique d'une plaque de Reissner-Mindlin .....</i>	<i>30</i>
<i>2.1.4. Equations de l'équilibre statique .....</i>	<i>32</i>
<i>2.1.5. Lois de comportement élastique .....</i>	<i>33</i>

<b>2.2. FORMULATION DU MODÈLE « ÉLÉMENT FINI » MIXTE-HYBRIDE MULTICOUCHES</b>	
<b>MiSP4/ML</b> .....	35
2.2.1. <i>Introduction</i> .....	35
2.2.2. <i>Formulation théorique du modèle MiSP4/ml</i> .....	36
2.2.2.1. Géométrie de l'élément .....	36
2.2.2.2. Approximation des variables cinématiques.....	36
2.2.2.3. Approximation des contraintes et conditions de stabilité.....	37
2.2.2.4. Approximation des champs de déformations .....	39
2.2.3. <i>Formulation variationnelle mixte-hybride projetée en cisaillement transversal,</i> <i>Matrice de rigidité élémentaire</i> .....	41
2.2.3.1. Intégration explicite suivant de $W_f$ . Prise en compte du caractère multicouche d'une plaque composite.....	42
2.2.3.2. Intégration explicite suivant l'épaisseur de $W_c$ . Prise en compte du caractère multicouche d'une plaque composite .....	43
2.2.3.3. Matrice de rigidité élémentaire .....	43
2.2.4. <i>Facteur de correction du CT pour le cas isotrope</i> .....	44
2.2.5. <i>Expression des contraintes tridimensionnelles et des efforts résultants</i> .....	45
2.2.5.1. Contraintes $\{\sigma_s\}$ et $\{\tau_s\}$ .....	45
2.2.5.2. Efforts résultants $\{M\}$ et $\{T\}$ .....	45
2.2.5.3. Contraintes tridimensionnelles multicouches. Utilisation des équations d'équilibre .....	46
2.2.6. <i>Formulation de la matrice masse élémentaire</i> .....	49

### CHAPITRE 3

#### VALIDATION NUMERIQUE DE L'ÉLÉMENT DE PLAQUE COMPOSITE MISP4/ML

<b>3.1. INTRODUCTION ET OBJECTIFS</b> .....	50
<b>3.2. RÉSULTATS DES CAS-TESTS STANDARDS DE PLAQUES COMPOSITES MULTICOUCHES</b>	50
3.2.1. <i>Plaque carrée composite à 3 et 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal</i> .....	50
3.2.2. <i>Plaque rectangulaire composite à 3 couches simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal (<math>b/a=3</math>)</i> .....	56
3.2.3. <i>Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme</i> .....	58
3.2.4. <i>Confrontation de l'élément MiSP4/ml à un modèle basé sur une théorie d'ordre supérieur</i> .....	61
3.2.4.1. Etude d'une stratification à 3 couches.....	61
3.2.4.2. Etude d'une plaque carrée sandwich.....	62
<b>3.3. TESTS DE VIBRATIONS LIBRES</b> .....	63

3.3.1. Plaque carrée isotrope simplement supportée .....	63
3.3.2. Vibrations libres d'une plaque carrée sandwich simplement supportée .....	65
3.3.3. Application aux vibrations libres d'une plaque en carton ondulé .....	66
3.3.3.1 Description de l'essai .....	66
3.3.3.2. Détermination des fréquences propres expérimentales .....	67
3.3.3.3 Validation numérique .....	68

## CHAPITRE 4

### FORMULATION ISOPARAMETRIQUE COURBE DU MODELE MIXTE-HYBRIDE DE COQUES COMPOSITES MULTICOUCHES

<b>4.1. INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS</b> .....	69
<b>4.2. DESCRIPTION GÉOMÉTRIQUE D'UNE COQUE</b> .....	69
4.2.1. Description de la surface moyenne .....	70
4.2.2. Description d'un point quelconque de la coque.....	72
<b>4.3. CHAMPS DES DÉPLACEMENTS VIRTUELS</b> .....	76
<b>4.4. CHAMPS DES DÉFORMATIONS VIRTUELLES</b> .....	77
4.4.1. Définition complète sans simplifications.....	77
4.4.2. Expressions simplifiées des déformations virtuelles .....	81
<b>4.5. INTRODUCTION AUX MODÈLES DE COQUES DÉVELOPPÉS SELON LA DÉFINITION DE LA PARTIE MEMBRANE</b> .....	81
4.5.1 Contraintes de membrane pour le modèle HMiSP4/Q4/ml.....	81
4.5.2 Contraintes de membrane pour le modèle NHMiSP4/ml.....	82
<b>4.6. FORMULATION VARIATIONNELLE MIXTE CLASSIQUE AVEC INTÉGRATION EXPLICITE SUIVANT L'ÉPAISSEUR</b> .....	83
4.6.1. Principe variationnel mixte-hybride (Hellinger-Reissner) .....	83
4.6.2. Approximation des contraintes planes (continuité $C^{-1}$ ).....	85
4.6.3. Approximation des variables cinématiques.....	86
4.6.4. Expression des champs de déformation en version simplifiée .....	86
4.6.4.1. Champ de déformations associé à la membrane et à la flexion.....	86
4.6.4.2 Déformations de cisaillement transversal $\{\gamma_0\}$ .....	87
4.6.5. Matrice de rigidité élémentaire mixte-hybride.....	90
4.6.5.1. Matrice de rigidité de l'élément HMISP4/ml/Q4 (membrane en déplacement, flexion/CT mixte-hybride) .....	90
4.6.5.2. Matrice de rigidité de l'élément NHMISP4/ml (membrane hybride naturelle, flexion/CT mixte-hybride) .....	91
4.6.6. Matrice de rigidité fictive .....	92
4.6.7. Passage dans le repère global .....	93
<b>4.7. CALCUL DES CONTRAINTES TRIDIMENSIONNELLES</b> .....	94

4.7.1. Cas d'une stratification symétrique .....	94
4.7.1.1. Contraintes planes $\{\sigma_s\}$ .....	94
4.7.1.2. Contraintes de CT $\{\tau_s\}$ .....	95
4.7.2. Cas d'une stratification non-symétrique .....	97
<b>4.8. FORMULATION DE LA MATRICE MASSE COHÉRENTE .....</b>	<b>101</b>

## CHAPITRE 5

### VALIDATION NUMÉRIQUE DES MODELES DE COQUES MULTICOUCHES

<b>5.1. INTRODUCTION .....</b>	<b>104</b>
<b>5.2. EXAMEN DES MODES RIGIDES .....</b>	<b>104</b>
5.2.1. Vérification des modes de translation rigide .....	105
5.2.2. Vérification des modes rigides de rotation .....	105
<b>5.3. RÉSULTATS DES CAS-TESTS STANDARDS DE COQUE ISOTROPE.....</b>	<b>106</b>
5.3.1. Cylindre pincé avec diaphragme.....	106
5.3.2. Hémisphère isotrope sous charges diamétralement opposées .....	108
5.3.3. Poutre vrillée isotrope sous charges concentrées.....	109
<b>5.4. APPLICATION AUX COQUES COMPOSITES MULTICOUCHES .....</b>	<b>112</b>
5.4.1. Etude d'un cylindre stratifié simplement supporté sous chargement sinusoïdal	112
5.4.2. Etude d'un panneau cylindrique simplement supporté avec chargement sinusoïdal .....	113
5.4.3. Etude d'une plaque sandwich non-symétrique.....	114
<b>5.5. ETUDE DES VIBRATIONS LIBRES DE STRUCTURES COMPOSITES .....</b>	<b>116</b>
5.5.1. Vibrations libres de panneaux composites.....	116
5.5.2. Vibrations libres d'une pale ventilateur isotrope .....	119
5.5.3. Confrontation des éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml à un élément d'ordre supérieur (HOST).....	122
5.5.3.1. Vibrations libres d'un panneau cylindrique simplement supporté.....	122
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>124</b>
<b>RÉFÉRENCES .....</b>	<b>128</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>136</b>
<b>ANNEXE A .....</b>	<b>137</b>
<b>ANNEXE B .....</b>	<b>139</b>

## Notations

CT	cisaillement transversal
ddl	degrés de liberté
$( )^e$	e : lettre traduisant une quantité élémentaire
W	forme intégrale
$\Pi$	fonctionnelle « énergie »
*	symbole de la quantité virtuelle
$f, x$	dérivé d'une fonction f par rapport à x
$\sim$	symbole traduisant un vecteur (ex : $\tilde{u}$ )
.	produit scalaire (ex : $\tilde{u} \cdot \tilde{v}$ )
$\wedge$	produit vectoriel ( ex : $\tilde{u} \wedge \tilde{v}$ )
{v}	vecteur en colonne
$\langle v \rangle$	vecteur en ligne
[M]	matrice M
$[M]^T$	Transposé de la matrice M
$[M]^{-1}$	inverse de la matrice M
$\forall$	quelque soit
$\sum$	sommation
$\prod$	série de produit
$\partial$	dérivé partiel
$\Delta$	différentiel de fonction
$\infty$	infinie
$\rho( )$	rang de ( )
$\rho$	masse volumique
Su	surface où les champs de déplacement soit nul
f	formulation

## Liste des figures

### CHAPITRE 1

#### INTRODUCTION GENERALE

<b>Figure 1.1.</b> Orientation des fibres à 90°. Essai de traction-compression.....	15
<b>Figure 1.2.</b> Types de renforts.....	15
<b>Figure1.3.</b> Distribution des contraintes de cisaillement $\tau_{xz}$ selon 3 théories .....	17
<b>Figure.1.4.</b> Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur). .....	18

### CHAPITRE 2

#### Formulation du modèle de plaque mixte-hybride multicouche sans facteurs correctifs de CT

<b>Figure 2.1.</b> Géométrie d'une plaque .....	29
<b>Figure 2.2.</b> Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène .....	29
<b>Figure 2.3.</b> Efforts résultants .....	30
<b>Figure 2.4.</b> Cinématique d'un point d'une plaque en flexion/CT.....	31
<b>Figure 2.5.</b> couche orthotrope.....	35
<b>Figure. 2.6.</b> Section d'une plaque stratifiée symétrique. ....	35
<b>Figure.2.7.</b> Géométrie de l'élément mixte-hybride standard.....	36
<b>Figure.2.8.</b> Déformations de CT de bords .....	40
<b>Figure.2.9.</b> Stratification de trois couches ayant la même orientation de fibre .....	44
<b>Figure 2.10.</b> une stratification à trois couches .....	48

### CHAPITRE 3

#### VALIDATION NUMERIQUE DE L'ELEMENT DE PLAQUE COMPOSITE MiSP4/ml

<b>Figure.3.1.</b> Stratification d'une plaque composite à 3 et 9 couches .....	51
<b>Figure.3.2.</b> Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Influence de L/h sur w au centre .....	55
<b>Figure.3.3.</b> Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal- Distribution de $\sigma_{xx}$ à travers l'épaisseur pour L/h=10 .....	55
<b>Figure.3.4.</b> Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal- Distribution de $\sigma_{xz}$ à travers l'épaisseur pour L/h=10 .....	56
<b>Figure.3.5.</b> Plaque carrée sandwich simplement supportée sous charge uniforme- données du problème.....	58
<b>Figure.3.6.</b> Plaque carrée sandwich simplement supportée sous charge uniforme- Distribution de $\sigma_{xx}$ à travers l'épaisseur (L/h=10) .....	60

<b>Figure.3.7.</b> Plaque carrée sandwich simplement supportée sous charge uniforme- Distribution de $\sigma_{xz}$ au centre $C(L/2,L/2)$ à travers l'épaisseur ( $L/h=10$ ) .....	60
<b>Figure 3.8.</b> Plaque rectangulaire stratifiée (3 couches 90/0/90) simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Données .....	61
<b>Figure 3.9.</b> Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Données .....	62
<b>Figure 3.10.</b> Plaque carrée isotrope simplement supportée en vibration libres - Influence du C.T. sur la fréquence propre fondamentale en fonction du numéro de mode ( $L/h=10$ )...	64
<b>Figure.3.11.</b> Plaque carrée isotrope simplement supportée en vibrations libres .....	64
<b>Figure 3.12.</b> Plaque rectangulaire (carton ondulé) encastree en vibration libre. Données géométriques et matérielles.....	66
<b>Figure 3.13.</b> L'essai du lâché.....	66
<b>Figure 3.14.</b> Accélération du point P. Plaque de longueur $L = 200$ mm.....	67
<b>Figure 3.15.</b> FFT de l'accélération du point P. Plaque de longueur $L = 200$ mm.....	68

## CHAPITRE 4

### FORMULATION ISOPARAMETRIQUE COURBE DU MODELE MIXTE-HYBRIDE DE COQUES COMPOSITES MULTICOUCHES

<b>Figure.4.1.</b> (a) géométrie 3D d'une coque , (b) un élément quadrilatéral courbe .....	70
<b>Figure 4.2.</b> Géométrie d'un point quelconque q.....	73
<b>Figure 4.3.</b> Cinématique virtuelle d'une fibre quelconque pq.....	77
<b>Figure 4.4.</b> Déformations naturelles de CT projetées sur les côtés .....	89
<b>Figure 4.5.</b> Une stratification à trois couches .....	97

## CHAPITRE 5

### VALIDATION NUMÉRIQUE DES MODELES DE COQUES MULTICOUCHES

<b>Figure 5.1.</b> Patch-test de modes rigides. Maillages utilisés.....	104
<b>Figure.5.2.</b> Cylindre pincé avec diaphragme. Données.....	107
<b>Figure.5.3.</b> Convergence de $W_C$ .....	107
<b>Figure.5.4.</b> Convergence de $V_D$ .....	108
<b>Figure.5.5.</b> Hémisphère pincé. Données.....	109
<b>Figure.5.6.</b> Hémisphère pincé. Convergence de $U_A$ .....	109
<b>Figure. 5.7.</b> Poutre vrillée. Données .....	110
<b>Figure 5.8.</b> Cylindre simplement supporté avec chargement sinusoïdal. Données.....	112
<b>Figure 5.9.</b> Panneau cylindrique simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Données .....	113

<b>Figure 5.10.</b> Plaque carrée Sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme- Données du problème.....	114
<b>Figure 5.11a.</b> Plaque carrée sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme –Distribution de $\sigma_{xx}$ à travers l'épaisseur (L/h=10).....	115
<b>Figure 5.11b.</b> Plaque carrée sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme –Distribution de $\tau_{xz}$ à travers l'épaisseur (L/h=10).....	116
<b>Figure.5.12.</b> Vibrations libres de panneaux composites. Données.....	117
<b>Figure 5.13.a.</b> Fréquence propre par rapport aux Modes de vibration pour la stratification [45/-45/-45/45/45 /-45/-45/45] .....	117
<b>Figure.5.13.b.</b> Fréquence par rapport aux Modes de vibration pour la stratification [0/0/30/-30/-30 /30/0/0] .....	118
<b>Figure 5.13.c.</b> Fréquence par rapport aux modes de vibration pour une stratification [0/45/-45/90] <sub>s</sub> . .....	118
<b>Figure.5.14.</b> Vibrations libres d'une pale de ventilateur. Données .....	119
<b>Figure.5.15.</b> Vibrations libres d'une pale de ventilateur- Modes propres- maillage(8x8) ....	121

## Liste des Tableaux

### CHAPITRE 3

#### Validation numérique de l'élément de plaque composite MiSP4/ml

<b>Tableau 3.1.</b> Plaque carrée composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison des déplacements et contraintes maximums. ....	53
<b>Tableau 3.2.</b> Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal : comparaison des déplacements et contraintes maximums. ....	54
<b>Tableau 3.3.</b> Plaque rectangulaire composite à 3 couches simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal- comparaison des déplacements et contraintes maximums .....	57
<b>Tableau 3.4.</b> Plaque carrée Sandwich simplement supporté sous charge uniforme. Comparaison des déplacements et contraintes $\sigma_{xx}$ maximums. ....	59
<b>Tableau 3.5.</b> Plaque rectangulaire stratifiée (3 couches 90/0/90) simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats du déplacement transversal et des contraintes .....	62
<b>Tableau 3.6.</b> Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Résultats de la flèche et du moment résultant au centre de la plaque .....	63
<b>Tableau 3.7.</b> Plaque carrée isotrope simplement supportée (L/h=10) - Comparaisons des 4 premières fréquences propres $\varpi = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{Eh^2}}$ .....	63
<b>Tableau 3.8.</b> Plaque carrée isotrope simplement supportée - Influence de L /h sur la fréquence fondamentale $\varpi = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{Eh^2}}$ .....	64
<b>Tableau 3.9.</b> Plaque carrée sandwich simplement supporté L/h=10 Comparaison des fréquences propres fondamentales $\bar{\omega}_f = \omega \sqrt{\frac{\rho(2)h^2}{G_{12}(2)}}$ .....	65
<b>Tableau 3.10.</b> Vibrations libres d'une plaque en carton ondulé. Pulsations propres expérimentales en fonction de la longueur de la plaque. ....	67
<b>Tableau 3.11.</b> Résultat numérique des pulsations propres. Comparaison avec l'expérience..	68

### CHAPITRE 5

#### VALIDATION NUMÉRIQUE DES MODELES DE COQUES MULTICOUCHES

<b>Tableau 5.1.</b> Résultats des déplacements au nœud 9 .....	106
<b>Tableau 5.2.a.</b> Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour h=0.32.....	111
<b>Tableau 5.2.b.</b> Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour h=0.0032.....	111

<b>Tableau 5.3.</b> Cylindre simplement supporté. Flèche au point C .....	112
<b>Tableau 5.4.</b> Panneau cylindrique simplement supporté. Convergence de la flèche au centre .....	113
<b>Tableau 5.5.</b> Plaque carré sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme- Comparaison des déplacement et contraintes $\sigma_{xx}$ maximum .....	115
<b>Tableau 5.6.</b> Vibrations libres d'une pale de ventilateur. Résultat des éléments HMISP4/Q4/ml et NHMISP4/ml. ....	120
<b>Tableau 5.7.</b> Fréquences propres, panneau cylindrique R=100 .....	122
<b>Tableau 5.8.</b> Fréquences propres, panneau cylindrique R=200 . ....	123

## RESUME

Cette étude doctorale concerne la formulation, la mise en programmation et l'évaluation de nouveaux modèles d'éléments finis mixtes-hybrides pour l'analyse linéaire statique et dynamique des structures en plaques et coques composites multicouches. Les éléments finis développés sont basés sur la théorie linéaire du premier ordre (théorie de Reissner/Mindlin). Ils présentent le principal avantage de ne pas recourir aux facteurs de correction du cisaillement transversal (CT) pour tenir compte de la distribution quadratique des contraintes de CT sur structures multicouches dans la direction de l'épaisseur.

Nous développons dans un premier lieu le modèle de plaque. L'élément fini mixte-hybride correspondant, baptisé MiSP4/ml, est une adaptation au cas des plaques stratifiées et sandwich du modèle MiSP4 isotrope, proposé et développé en 1993 par Ayad sur la base du modèle mixte projeté en cisaillement (MiSP : *Mixed with Shear Projection*). Grâce à cette adaptation réussie, le modèle MiSP4/ml modélise des plaques composites quelque soit le nombre de couches, sans recourir aux facteurs de correction du CT. L'élément fini proposé est de forme quadrilatérale à 4 nœuds et 3 ddl/nœud. Il est libre de tout verrouillage en CT et présente des performances appréciables en matière de précision, comparativement aux éléments issus des théories d'ordre supérieur, souvent complexes et coûteuses en temps de calcul.

Nous développons en second lieu deux modèles d'éléments finis isoparamétriques courbes à 4 nœuds pour l'analyse des coques composites multicouches. Le premier modèle est mixte-hybride naturel, baptisé NHMiSP4/ml (*Natural Hybrid Mixed with Shear Projection 4-node/multilayer*). La partie membrane est complètement hybride, c'est une amélioration du modèle de Pian, et la partie flexion/CT est mixte-hybride, offrant toutes les deux un avantage de taille à l'élément, en terme de précision sur les contraintes, avec une sensibilité moindre aux distorsions de maillages. Le second modèle, baptisé HMiSP4/Q4/ml, développe une formulation en déplacement pour la membrane et une formulation mixte-hybride en flexion/CT. Nous l'avons formulé pour tester son aptitude à reproduire de bons résultats en dépit d'une représentation moins riche de la membrane. Un des avantages de ces deux modèles de coques est la prise en compte dans la formulation théorique du gauchissement dans les coques. Leur adaptation aux coques multicouches suit la même démarche que pour la plaque multicouches. Les facteurs de correction du CT sont également évités. Les deux éléments sont confrontés à des éléments en déplacement et d'ordre supérieur sur des cas-tests de coques multicouches sous sollicitations statiques et dynamiques (vibrations libres).

# Chapitre 1

## INTRODUCTION GENERALE

### 1.1. Synthèse sur la modélisation par éléments finis des plaques et des coques composites

#### 1.1.1. Les matériaux composites

##### 1.1.1.1. Généralités

Les matériaux composites ne sont pas une nouveauté. En effet, dès l'antiquité, ils ont été utilisés par l'homme. Le bois et le torchis sont des composites de la vie quotidienne. Un autre exemple est l'utilisation des composites pour optimiser les performances de certaines armes, par exemple :

- Les arcs mongols, dans lesquels les parties comprimées sont en corne, et les parties tendues sont en bois, soies collées et tendons de bœuf.
- Les épées damassées ou sabres japonais dont les lames sont en acier et en fer doux [1] .

Le matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à la performance des composants pris séparément. Il est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc...). Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice permet de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures. Le mélange entre eux est réalisé par polymérisation (réaction chimique)[2] .

En effet, les matériaux composites multicouches ont un comportement particulier, et ceci est dû essentiellement à deux facteurs. Le premier facteur résulte du comportement anisotrope du matériau utilisé dans la couche élémentaire : contrairement aux matériaux isotropes, les matériaux composites multicouches sont peu rigides en cisaillement. Le deuxième facteur dérive de la stratification qui consiste en l'empilement de plusieurs couches, ce qui favorise l'effet de cisaillement, et particulièrement du cisaillement transversal (noté CT) .

### *1.1.1.2. Les avantages et inconvénients des matériaux composites monocouches pour certains produits*

#### a. Produits aéronautiques

La principale motivation dans l'utilisation des matériaux composites pour la réalisation des structures aéronautiques est essentiellement le gain de masse apporté tout en conservant d'excellentes caractéristiques mécaniques. Les matériaux composites présentent aussi une quasi insensibilité à la fatigue, en comparaison aux matériaux métalliques qui nécessitent une maintenance et un suivi régulier de la propagation des fissures. Ils ne sont pas aussi sujets à la corrosion, mais ils nécessitent une bonne isolation électrique lors des assemblages avec des pièces en alliages légers entre le composite et le métal pour éviter la corrosion galvanique de l'aluminium (si la fibre de renfort est en carbone par exemple). Les techniques de fabrication utilisées permettent l'obtention de formes complexes directement par moulage avec possibilité de réaliser en une seule pièce un ensemble, qui réalisé en métallique, nécessite plusieurs sous éléments. Ceci permet de réduire les coûts d'assemblage de façon importante.

#### b. Produits militaires

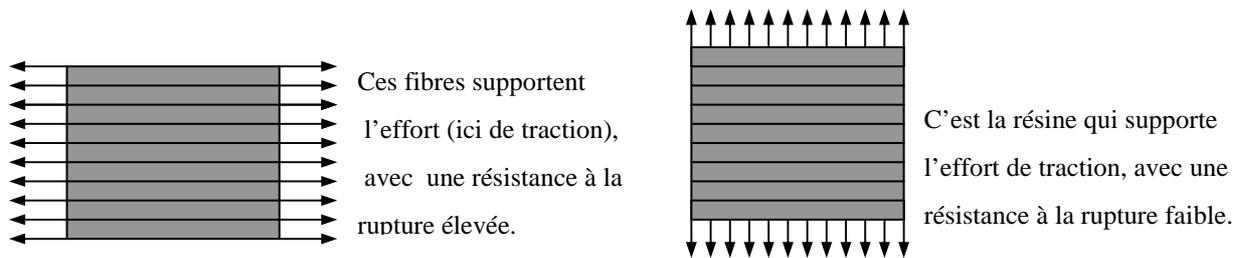
Pour les missiles, le principal avantage pour le constructeur d'utiliser des matériaux composites est de pouvoir proposer à ces clients des produits associant performance et légèreté. Par contre l'utilisation des composites sur les ailettes de guidage des missiles permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale. A cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de l'air sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent fondre dans certaines conditions et le missile poursuit sa trajectoire sans contrôle, ce qui entraîne une perte de précision du tir. L'utilisation de matériaux composites sur les ailettes de part leur faible conductivité thermique fait qu'en fin de mission, les ailettes conservent une certaine intégrité de forme, ce qui permet de maintenir la trajectoire du missile sans perte de précision.

#### c. Produits spatiaux (satellites)

Les déformations de la structure peuvent avoir une origine thermique avec des expositions à la température pouvant varier entre  $-180^{\circ}\text{C}$  lorsque le satellite est dans l'ombre et  $+160^{\circ}\text{C}$  lorsque le satellite est exposé au soleil. De plus, sur la même structure, entre la face éclairée et la face à l'ombre, le gradient de température peut être important. Les structures en matériaux composites à matrice organique, de part la valeur négative du coefficient de dilatation thermique des fibres de carbone et la valeur positive du coefficient de dilatation thermique de la matrice, peuvent, avec une orientation optimisée des différentes couches constituant la structure, présenter globalement un coefficient de dilatation thermique proche de zéro pour l'ensemble de la structure. La stabilité géométrique de la structure est apportée

par sa raideur globale. L'utilisation des fibres de carbone à très haut module sur les composites permet de répondre à cette préoccupation. Le principal inconvénient des composites à matrices organiques pour les applications satellites est sans aucun doute la reprise d'humidité, pendant les opérations d'assemblage et pendant le stockage avant lancement [3].

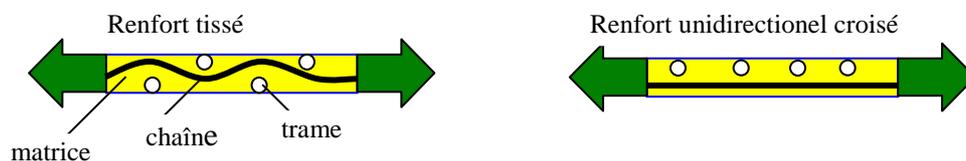
### 1.1.1.3 Effet de l'orientation des fibres sur la déformation de composite monocouche



**Figure 1.1.** Orientation des fibres à 90°. Essai de traction-compression

Pour un matériau composite monocouche, l'orientation de la fibre est choisie de façon adaptable avec les directions de l'efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu'elles résistent aux efforts de traction et de compression. Pour résister aussi à l'effet de cisaillement, on met deux fibres orthogonales de façon à ce que l'une d'elle supporte l'effet de compression ou traction et l'autre l'effet de cisaillement.

En outre, il y a une influence de la forme de renfort sur la déformation. En effet, la raideur obtenue avec un renfort tissé sera moindre que celle que l'on observait en superposant deux directionnels croisés à 90°. Cela est dû à la courbure des fibres du fait de l'opération de tissage (figure ci-après), qui rend le pli tissé plus déformable que les unidirectionnels croisés sous une même sollicitation.



**Figure 1.2.** Types de renforts

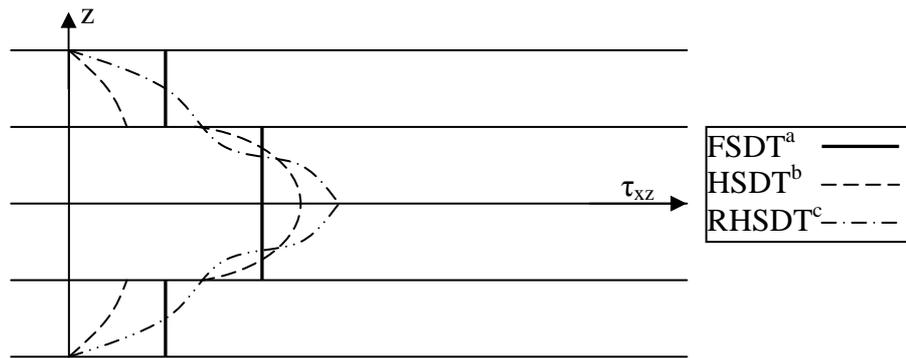
Les sections de ces fibres étant très petites, chaque fibre dispose d'une rigidité de flexion et de compression très faible, comparativement à la rigidité à tension, compte tenu des rotations possibles entre les mèches chaînes et trame. Ainsi, les tissus ne présentent pas (ou

peu) de rigidités en cisaillement et d'importantes variations angulaires entre les mèches sont possibles [4] .

### 1.1.2. Evolution des théories aux éléments finis pour la modélisation des composites multicouches

Il est rare de trouver une théorie qui serait applicable à tous les cas possibles (matériau composite, anisotrope, isotrope, grand nombre de couches, stratification sandwich etc...) et aux différents domaines (statique, dynamique et flambage), et qui de plus serait simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul.

La théorie la plus ancienne est celle de Kirchoff [5] qui néglige l'effet de cisaillement transversal. Elle ne peut en conséquence être appliquée qu'aux structures très minces. La théorie du premier ordre communément associée à Mindlin [51] qui fût l'un des premiers à énoncer ses bases, prend en compte les effets du cisaillement transversal à travers l'épaisseur. Elle conduit, de part l'hypothèse des « sections droites restent droites » à un vecteur des contraintes de CT constant dans l'épaisseur, en contradiction avec une représentation quadratique classiquement obtenue pour les poutres (théorie de Timoshenko) ou les plaques en flexion/CT. Pour corriger cette insuffisance, des facteurs dits de correction du CT  $\gamma$  sont introduits. Les éléments finis formulés en déplacement basés sur la théorie du premier ordre donnent généralement de bons résultats pour les structures isotropes et orthotropes. Ils deviennent peu précis une fois appliqués aux matériaux composites contenant plusieurs couches avec une anisotropie très différente d'une couche à une autre, au quel cas il faudrait imposer des conditions de continuité sur les interfaces [6] (fig. 1.3). Certes, les facteurs de correction du CT, une fois introduits dans les modèles du 1<sup>er</sup> ordre en déplacement, ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leur évaluations dépend malheureusement du nombre de stratifications . Pour écarter à jamais ce type de problème, des théorie d'ordre supérieur ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par witney [7], qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à 3. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet un grand nombre de paramètres. D'autres théorie sont apparues par la suite, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application. Une synthèse sur l'aspect « éléments finis » et le lien avec les théories du premier ordre et d'ordre supérieur est développée dans la section suivante.



**Figure1.3.** Distribution des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  selon 3 théories

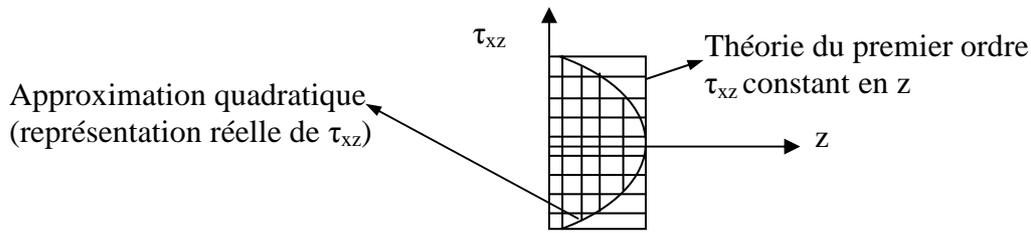
- a : FSDT, First order shear deformation theory  
 b : HSDT, High order shear deformation theory  
 c : RHSDT, Refined high order shear deformation theory

### 1.1.3. Eléments finis et facteurs de correction du CT

Les matériaux composites multicouches sont le plus souvent modélisés par éléments finis afin d'obtenir une estimation des contraintes et des déformations dues aux efforts extérieurs. En raison de leurs différentes applications industrielles, les éléments finis ont attiré l'attention d'un grand nombre de groupes de recherche. Ceci a conduit à une amélioration considérable de leurs caractéristiques.

Le calcul des éléments finis consiste d'une part à déterminer le déplacement des points de la structure sous diverses sollicitations, et d'autre part à bien formuler la variation de l'énergie, ce qui permet de déduire les contraintes et les déformations. Ainsi, les chercheurs ont étudié le choix du champ de déplacement, ainsi que la formulation de la variation de l'énergie. Plusieurs théories ont été dégagées. Nous en citerons les plus intéressantes.

Un premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre [11 - 17]. En optant pour ce choix, les auteurs considèrent que les contraintes et les déformations de cisaillement sont constantes à travers l'épaisseur d'une structure composite. Dans le cas réel, ceci n'est pas vrai. En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (Figures 1.3 et 1.4). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre, des facteurs de corrections doivent être introduits, comme cela a été souligné précédemment.



**Figure.1.4.** Approximations de la contrainte du CT : constante (théorie du premier ordre) et quadratique (ordre supérieur).

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse, associée à la théorie du 1<sup>er</sup> ordre, et celle due aux contraintes de cisaillement. Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre. [13,17,8,9]. Un calcul plus exact [13,15,16] des facteurs de correction est obtenu en comparant l'énergie de cisaillement du 1<sup>er</sup> ordre et celle associée à la théorie d'ordre supérieur. Pour un matériau isotrope ( $k_1=k_2=5/6$ ) [11],[12],[13], nous obtenons en général  $U_{CT} = k\tilde{U}_{CT}$  ( $\tilde{U}_{CT}$  est l'énergie de cisaillement obtenue en utilisant les équations d'équilibres et  $U_{shear}$  est de cisaillement par la théorie du premier ordre (Mindlin)). Pour les matériaux composites, deux facteurs de correction  $k_1$  et  $k_2$  sont introduits :

$$U_{CT1} = k_1\tilde{U}_{CT1} \text{ et } U_{CT2} = k_2\tilde{U}_{CT2}$$

$\tilde{U}_{CT1}$  et  $U_{CT1}$  sont les énergies suivant l'axe x.  $\tilde{U}_{CT2}$  et  $U_{CT2}$  sont les énergies suivant l'axe y.

Bouabdallah [9] a développé une méthode de calcul des facteurs de correction du CT pour les coques cylindriques courbes. Il les identifie par une comparaison entre l'énergie de cisaillement résultante des équations d'équilibre et celle provenant de la déformation de cisaillement de premier ordre (énergie effective). Bouabdallah a aussi étudié l'influence du rapport épaisseur/rayon ( $h/R$ ) sur les facteurs de correction  $k_{xz}$  et  $k_{yz}$  on note que  $R$  est le rayon courbure de la coque. Il a conclu que plus  $h/R$  augmente, plus l'écart entre  $k=5/6$  (plaque isotrope) et  $k_{xz}$  augmente.

Dans le cas de la théorie du premier ordre, le coefficient  $k$  permet d'estimer à priori la sensibilité des poutres au cisaillement transversal. Dans une section composite, cela permet d'optimiser les orientations des fibres, quand il s'agit de matériau unidirectionnel, où les épaisseurs relatives des différentes couches dans les autres cas. Batoz [13] a utilisé la même méthode d'équivalence entre l'énergie exacte et celle récupéré du modèle. Il a introduit le gauchissement dans la déformation de membrane. Une autre procédure est développée par Aurichio & Elio-Sacco[13] qui ont adopté le principe d'équivalence entre l'énergie de cisaillement calculée par la contrainte de cisaillement  $\tau^k$  (elle-même obtenue par les relations

constitutives de la théorie du premier ordre) et l'énergie de cisaillement calculée en adoptant la contrainte  $\hat{\tau}^{(k)}$  (recouvrée par les équations d'équilibre 3D).

Choa et al [29] ont proposé une autre méthode de calcul des facteurs de correction en comparant l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier ordre et celle déduite des équations d'équilibre de façon à obtenir des facteurs de correction initiale entre FSDT(First Shear Deformation Theory) et EHOST(Efficient High Order Theory) (Pour corriger les déformations de CT qui réduisent l'effet de rotation de l'angle de cisaillement  $\gamma$ ).

#### 1.1.4. Synthèse bibliographique sur les théories d'ordre supérieur

##### *i- Aspects généraux:*

Les facteurs de correction du CT dépendent du nombre de couches ou de stratifications présentes dans une plaque ou une coque composite. Pour éviter d'utiliser ces facteurs, certains auteurs ont adopté des théories dites d'ordre supérieur où le champ de déplacements est en général défini par une série de Taylor de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{\sigma(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{\sigma(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{\sigma(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{\sigma(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (1.1)$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3<sup>ème</sup> ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité [19],[20],[21]. La valeur de  $\phi_j^{\sigma(i)}$  détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_j^{\sigma(i)} = 0$  pour  $i= 2, 3, 4 \dots$ ,  $j=1..2$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (1.1) est utilisé avec. Le champ de déplacement (1.1) devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.2)$$

Selon l'expression de la frontière de cisaillement  $f(z)$ , quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [22] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (1.3)$$

- L'approche de Reissner [52], Panc[23] et Kaczkowski [24] avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (1.4)$$

- L'approche de Levinson [25], Murthy [26] et Reddy [27] avec ;

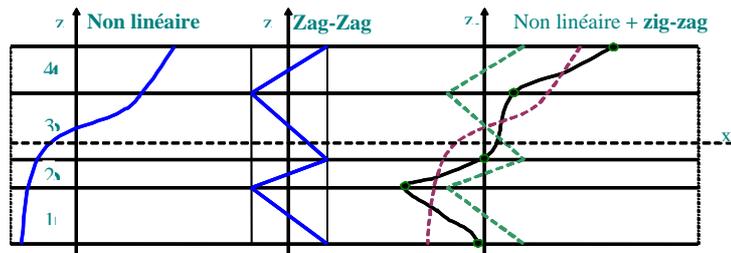
$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (1.5)$$

## ii- Théorie de zig-zag

Pour mieux décrire la déformation par la théorie d'ordre supérieur pour matériaux composites, certains auteurs ont associé la théorie d'ordre supérieur à celle dite de zig-zag [28],[29],... Cette dernière est destinée justement à mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et est indépendante du nombre de couches.

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour cisaillement transverse est évité.

En se basant sur le concept de Di Sciuva [30], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag (Murakami [31], Cho [32], Averill [33], He [34], Icardi 01a[35], Icardi 01b[36], Carrera [37]). L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (figure 1.5). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques pour réduire le nombre de paramètres.



**Figure.1.5.** Champ de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [37]

A travers notre lecture de la littérature en matière de théories d'ordre supérieur, il apparaît que celles-ci sont certes intéressantes du point de vue précision, mais demeurent néanmoins coûteuses en temps de calcul et assez complexes en terme de formulations .

### iii- Application des théories d'ordre supérieur

Les théories d'ordre supérieur envisagées par certains auteurs sont applicables à certains types de problème (statique, dynamique, flambage,.. ). La performance d'un élément fini est liée à la théorie utilisée. La théorie d'ordre supérieur se distingue par son ordre polynomial, son nombre de coefficients ou de paramètres qu'elle engendre et le type d'élément qu'elle utilise. Il y a beaucoup de problèmes qui ne se résolvent que par l'utilisation de certaines techniques ajoutées à ce type de théorie ; nous citons en particulier les problèmes de discontinuité des contraintes sur les interfaces, de verrouillage en CT de l'élément (shear locking), d'apparition de modes parasites. Dans ce qui suit, nous résumons les différentes théories se déclinant par rapport aux problèmes précédents :

- M. Moita [38] a proposé un élément quadrilatère à 9 nœuds et 10 degrés de liberté par nœuds. Les champs déplacements  $u$  et  $v$  sont cubiques par rapport à l'épaisseur et  $w$  est constant. Il est particulièrement efficace pour calculer le flambage des plaques épaisses et minces. Le nombre de paramètres étant important, rend le calcul assez lourd.
- Patel et al [39] ont traité une structure de coque assez compliquée géométriquement au 3<sup>ème</sup> ordre, afin d'améliorer l'état de déformation. Ils ont introduit l'effet de zig-zag qui assure la continuité sur les interfaces (le nombre de paramètres augmente avec le nombre de couches).
- Kant et al [41] ont développé un élément basé sur la théorie d'ordre supérieur raffiné (surtout sur les plaques sandwich). Ils ont défini un champ de déplacement de telle façon que  $u, v, w$  soient cubiques par rapport à l'épaisseur. Chaque ensemble de 2 couches successives est divisé en un certain nombre de sous-couches pour améliorer l'état de contrainte de cisaillement et avoir une continuité aux interfaces.
- Semedo-Garçao et al [42] ont utilisé une méthode particulière d'ordre élevé (Layerwise) qui consiste à prendre beaucoup de paramètres. Elle est habituellement utilisée pour les matériaux composites comprenant beaucoup de couches, où chacune ayant des propriétés

différentes de l'autre, en imposant une continuité sur les interfaces pour les champs de déplacement et ceux des contraintes. Ils ont développé les champs de déplacements en termes de deux fonctions (fonction d'interpolation et fonction polynôme de Lagrange  $\Phi_i(z)$ ) qui changent d'une couche à autre. Cette théorie est très précise au niveau des résultats mais elle est très compliquée à mettre en œuvre.

- Nayak et al [43] ont proposé un élément HSDT (high order shear deformation theory) qui utilise un champ de déplacements d'ordre 2 (le plus simple). Pour éliminer le verrouillage en CT, ils ont utilisé une hypothèse faisant intervenir 9 paramètres ( $1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \eta^2, \eta^2\xi^2, \xi\eta^2, \eta\xi^2$ ) pour définir les contraintes de cisaillement transversal  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ .
- Rank et al [44] ont adopté deux théories. La 1<sup>ère</sup> (théorie solide de coque) est basée sur un élément hexagonal à 9 nœuds, la 2<sup>ème</sup> théorie est hiérarchique (hierarchical theory); le champ de déplacements a un ordre équivalent au nombre de couches : 
$$u(\xi, \eta, k) = \sum_{k=0}^{nc} (z)^k u^k(\xi, \eta)$$
.  $u^k$  est une fonction d'interpolation à définir.
- Zen Wu et al [45] ont proposé une théorie intéressante du point de vue des résultats sur les contraintes. Celle-ci assure la continuité sur les interfaces et les conditions nulles (en bas et en haut). Elle définit sur chaque couche un champ de déplacement différent et utilise 11 degrés de liberté par nœud. Elle est communément appelée « high order shear refined theory ».
- Matsunoge [46] ont proposé une théorie qui consiste à développer le champ de déplacements à l'aide de l'approche dite « power series expansion ». Sur chaque couche, l'auteur définit un nouveau champ de déplacement  $V_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} V^n \gamma_3^n$  et les contraintes sont déduites des équations d'équilibre par le principe variationnel de l'énergie. Le nombre de paramètres étant réduit.

Toutes ces théories sont très intéressantes, d'une part pour traiter le problème de discontinuité des contraintes sur les interfaces et, d'autre part pour éviter l'utilisation des facteurs de correction de CT. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants. Le seul reproche à faire à ce type de théories est qu'elles sont gourmandes en temps de calcul.

### 1.1.5. Modèles mixte-hybrides de premier ordre

Les modèles « éléments finis » mixtes, mixtes-hybrides ou hybrides ont souvent été utilisés pour leur degré de précision en terme de contraintes. Ils ont également constitué une solution au problème de verrouillage en CT des éléments finis de plaque en flexion/CT formulés en déplacement.

Plusieurs formalismes variationnels mixtes existent en effet pour le développement d'éléments finis précis. Nous citons les formulations complètement hybrides, mixtes généralisées au sens de Hu-Wachizu et plus particulièrement celle dite « mixtes ou mixtes-

hybrides » au sens de Helliger-Reissner. Cette dernière a été adoptée dans la présente étude pour la formulation de nos modèles éléments finis de coques composites multicouches.

La formulation mixte-hybride consiste à utiliser les variables mécaniques de type contraintes ou efforts résultants que nous approximations en fonction de paramètres satisfaisant à la condition de continuité  $C^{-1}$ . Le nombre de paramètres joue un rôle important dans la disparition des modes parasites. Nous citons dans ce qui suit quelques modèles mixtes-hybrides utilisés dans la littérature pour les structures composites :

- Kim et al [40] ont utilisé une formulation mixte-hybride générale pour une poutre en introduisant deux fonctions « bulles » au champ de déplacements et au vecteur des contraintes associant la contrainte de cisaillement et la contrainte de flexion ( $\sigma=P\beta$ ,  $n(\beta)=9$ ). Leur modèle donne de bons résultats pour les contraintes, ne présente pas de verrouillage en CT. Il reste assez coûteux en raison des fonctions bulles qu'il utilise.
- Shi et al [47] ont développé une méthode appelée « weighted residual approach » qui consiste à substituer les différentes variables dans l'équation différentielle du problème (équation faible). L'approximation des vecteurs contraintes et déplacements est donnée par  $\{\sigma\}=[P]\{\beta\}$ ,  $\{u\}=[N]\{u_n\}$ , ( $p$ : définition quadratique en fonction de  $\xi$  et  $\eta$ ).
- Bishoff et al [48] ont utilisé une technique appelée EAS pour réduire le blocage en membrane et éliminer la sensibilité à la distorsion géométrique (Enhanced Assumed Strain). Ils ont enrichi par leur technique la déformation de membrane en introduisant 5 ou 7 paramètres. La technique ANS (Assumed Naturel Strain) est utilisée pour éliminer le verrouillage en CT. Le formalisme variationnel utilisé est celui de Hu-Washizu.
- Wanmin et al [49] ont proposé un élément composite à 4 nœuds du premier ordre. Ils ont utilisé une formulation mixte-hybride incomplète (elle est mixte en cisaillement, la membrane et la flexion sont formulées en déplacement). Les auteurs utilisent des fonctions bulles pour les variables de rotation et des fonctions isoparamétriques afin de relier les variables de flexion à celles de déplacement transverse. Cet élément est valable pour une application dans le domaine du délaminage où des défauts apparaissent dans la structure. Les auteurs présentent un programme de calcul des facteurs de correction du CT.
- Les éléments DSQ et DST de Lardeur [8] sont basés sur un modèle variationnel mixte modifié. L'auteur calcule la déformation de CT en partant des équations d'équilibres ( $\{\gamma\}$  constant,  $w$  cubique,  $\beta$  quadratique). Ensuite, il ajoute à chaque coté de l'élément deux variables cinématique ( $w,x$  ,  $w,y$  ) et 2 rotations au milieu ( $\beta_s$  et  $\beta_n$  ). Il obtient par

exemple  $8\beta$  et 4  $w$  pour un quadrilatère qui seront éliminés par les équations d'équilibres. Les deux éléments éliminent le verrouillage et ne présentent pas de modes parasites. Cependant, la formulation théorique reste complexe et nous devons calculer pour chaque problème les facteurs de correction.

- Bouabdallah [9] a utilisé une formulation mixte de type Hellinger-Reissner en contrainte. Toutes les contraintes sont définies dans un seul vecteur  $\{\sigma\}$  qu'il exprime en termes des paramètres  $\{\alpha\}$ . Au moins 14 paramètres sont nécessaires pour pouvoir éviter l'apparition des modes parasites ; ils sont éliminés par condensation statique au niveau élémentaire. L'élément quadrilatéral à 4 nœuds donne de bons résultats sans modes parasites. Cependant, cette technique reste limitée à l'étude des structures courbes essentiellement cylindriques. D'autre part, elle fait appel aux facteurs de correction du CT pour simuler le comportement mécanique de structures composites multicouches.
- L'élément fini proposé par Katili [10] pour les plaques est basé sur la théorie des plaques épaisses de Reissner/Mindlin (théorie du premier ordre). La fonctionnelle utilisée est de type mixte modifié de Hu-Washizu. Les variables cinématiques  $(w, \beta_x, \beta_y)$  de continuité  $C^0$  sont interpolées de manière quadratique en introduisant des variables  $\alpha_k$  au milieu du côté  $k$ .  $\alpha_k$  sont éliminés par une technique utilisant les équations d'équilibres. L'élément fini, baptisé DST-BK élimine le verrouillage en CT et ne présente pas de modes parasites. Il utilise également les facteurs de correction du CT pour simuler le comportement de structures composites multicouches.
- L'élément de Song et al [12] est basé sur un modèle mixte généralisé. Il calcule les contraintes d'une façon précise. Les efforts résultants  $\{M\}$  (moments de flexion) et  $\{N\}$  (efforts normaux) sont respectivement interpolés linéairement, avec 12 paramètres de flexion  $\alpha_f(12)$  pour  $\{M\}$  et 5 paramètres de membrane  $\alpha_m(5)$  pour  $\{N\}$ . L'approximation des efforts de CT  $\{T\}$  utilise les mêmes paramètres  $\alpha_f$  car elle est définie à partir de celle de  $\{M\}$  via les équations d'équilibre. Pour approcher les déformations de CT  $\{\gamma\}$ , les auteurs supposent une déformation de cisaillement constante sur les côtés de l'élément. Les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont interpolées de façon bilinéaire mais avec la présence de 4 fonctions « bulle ». L'élément mixte de plaque final donne de bons résultats et en particulier sur les contraintes, ne présente pas de modes parasites mais introduit les facteurs de correction dans la matrice de comportement de cisaillement. Il reste relativement coûteux à cause des fonctions « bulle » qu'il utilise.

Enfin, parmi les éléments proposés dans la littérature, on trouve beaucoup d'éléments qui utilisent les fonctions « bulles » d'ordre supérieur (quadratique, cubique et d'ordre 4). En effet, par ce moyen, la condition de non verrouillage de CT peut être facilement vérifiée.

L'inconvénient majeur dans l'utilisation de ce type de fonctions est le coût élevé qu'elles engendrent en terme de points d'intégration numérique nécessaire au calcul exact des matrices élémentaires. L'augmentation des paramètres généralisés associés aux fonctions « bulle » peut constituer également un inconvénient, lié cette fois-ci aux opérations d'inversion des matrices lors du processus de condensation statique. Nous avons également constaté que ces éléments utilisent tous des facteurs de correction de CT, une fois appliqués aux structures composites multicouches.

## 1.2 Objectif de la thèse

Le premier objectif de cette thèse est de développer une famille d'éléments mixtes-hybrides quadrilatéraux à 4 nœuds, pour les structures en plaque et coque isotropes et composites multicouches, prenant en compte les effet du cisaillement transversal (CT). Leur formulation est basée sur un modèle variationnel mixte-hybride que nous appelons «Modèle Mixte Projeté en Cisaillement» ou encore «modèle mixte avec hypothèses discrètes de Mindlin» (en anglais, **MiSP** : *Mixed with Shear Projection*). Ce nouveau modèle est également valable pour des structures sans effet de CT (plaque et coque très minces ou de Kirchooff).

La contribution essentielle de ce travail de recherche est l'introduction d'une formulation mixte-hybride de plaques et de coques courbes, basée sur la théorie de premier ordre de Mindlin en évitant de recourir aux facteurs de correction du cisaillement transversal lors de la modélisation des structures composites multicouches. L'intérêt général est quelque part d'éviter l'utilisation de théorie d'ordre supérieur, souvent complexes et coûteuses en temps de calcul.

Les éléments finis multicouches développés sur la base du modèle MiSP sont :

- Pour la plaque en flexion et CT :
  - MiSP4/ml : un quadrilatère à 4 nœuds (ml : multilayer)
- Pour la coque courbe en membrane, flexion et CT :
  - NHMiSP4/ml : un quadrilatère à 4 nœuds isoparamétrique courbe, avec une formulation hybride naturelle (au sens de Pian modifié) pour la membrane et une formulation mixte-hybride pour la flexion et le CT (ml : multilayer)
  - HMiSP4/Q4/ml : un quadrilatère à 4 nœuds isoparamétrique courbe, avec une formulation en déplacement pour la membrane et une formulation mixte-hybride pour la flexion et le CT (ml : multilayer)

Ces éléments sont appliqués aux structures composites multicouches, épaisses et minces, sous sollicitations statiques et dynamiques (vibrations libres).

### 1. 3. Plan de la thèse

- En premier lieu (chapitre 1), nous nous attachons à donner un aperçu bibliographique sur l'utilisation des matériaux composites, des théories aux éléments finis d'ordre 1 ou d'ordre supérieur, avec ou sans facteurs correctifs du cisaillement transversal, et des formalismes variationnels adéquats existants..
- Le chapitre 2 est consacré à la formulation théorique du modèle de plaque composite multicouches en flexion/CT. Celui-ci est basé sur la théorie linéaire du premier ordre, communément associée à celle de Reissner/Mindlin. Seuls les effets de flexion et de CT sont pris en compte, l'aspect membrane est développé dans chapitre 4. Il s'agit du modèle mixte-hybride MiSP (*Mixed with Shear Projection*) pour lequel, d'une part l'approximation des efforts de CT résulte de celle des moments de flexion en satisfaisant explicitement les équations d'équilibre en flexion. D'autre part, les déformations de CT sont définies en fonction des déformations de bords que nous projetons sur les degrés de liberté nodaux. Un nouveau modèle d'élément fini mixte-hybride à 4 nœuds, sans introduction de facteurs correctifs du CT, est proposé sur la base du modèle MiSP. Il s'agit de l'élément de plaque multicouches MiSP4/ml (*Mixed Shear Projection 4-nodes/multilayer*).
- Le chapitre 3 est consacré à la validation numérique du modèle de plaque MiSP4/ml proposé sur des cas-tests standards de plaques stratifiées et sandwich, sous sollicitations statiques et en vibrations libres. Les performances du modèle en matière de précision sont évaluées à travers des tests de plaque composites à 3 et 9 couches, simplement supportée et encastrée, sous un chargement sinusoïdal ou uniforme.
- Le chapitre 4 concerne la modélisation des coques de forme quelconques. Nous avons adopté l'approche géométrique du solide 3D-dégénéré dans l'épaisseur, aujourd'hui largement utilisée. Les éléments finis courbes correspondants sont basés sur l'approximation des composantes cartésiennes du déplacement d'un point quelconque de la coque. Dans notre cas, nous considérons une approximation isoparamétrique de la géométrie et des déplacements de la surface moyenne. Cette approche est utilisée pour la formulation de deux éléments quadrilatéraux mixtes-hybrides de coques composites multicouches en utilisant le modèle MiSP (*Mixed Shear with Projection*). Il s'agit des éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml (présentés précédemment en objectifs). Ils ont été intégrés explicitement dans l'épaisseur, de façon totalement découplée de l'intégration numérique sur la surface moyenne.

- Le chapitre 5 est consacré à la validation numérique des éléments de coques proposés. L'examen des six modes rigides d'une coque est effectué en premier lieu (section 5.1). Une série de cas standards considérés par les ingénieurs comme des outils importants de validation des éléments de coque est utilisée par la suite (section 5.3). Différents types de sollicitations statiques et en vibrations libres sont traités pour les structures composites stratifiées et sandwich (section 5.4). Nous avons pu montrer à travers ces tests les capacités et les limites de nos modèles mixtes-hybrides de coque de premier ordre.

## Chapitre 2

### Formulation du modèle de plaque mixte-hybride multicouche sans facteurs correctifs de CT

#### 2.1. Rappel sur la théorie des plaques du premier ordre

##### 2.1.1. Hypothèses cinématiques et mécaniques

La théorie des plaques du premier ordre ou de Reissner-Mindlin [50,51] est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes :

##### Cinématiques :

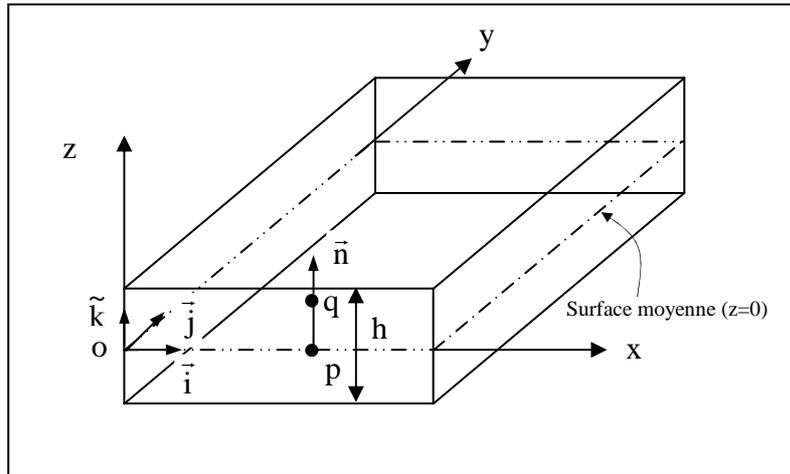
- H1 : Hypothèse des sections droites  
*“Toute section droite perpendiculaire à la surface moyenne non déformée reste droite mais non nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée”.*
- H2 : La composante transversale du déplacement suivant l'épaisseur est constante.

##### Mécaniques :

- H3 : Hypothèse des contraintes planes  
*“La contrainte  $\sigma_z$  est négligeable devant les autres composantes du tenseur des contraintes”*
- H4 : Hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite. Cette hypothèse considère z comme axe d'orthotropie de toutes les couches (orthotropie dans le plan LT, Figure 2.5).

##### 2.1.2. Géométrie et efforts résultants d'une plaque

Une plaque est un solide tridimensionnel dont une des dimensions, appelée « épaisseur », est petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques. Ce solide particulier comporte généralement un plan de symétrie en  $z=0$  (plan Oxy) (Figure 2.1) appelé « surface de référence » ou « surface moyenne » de la plaque.



**Figure 2.1.** Géométrie d'une plaque

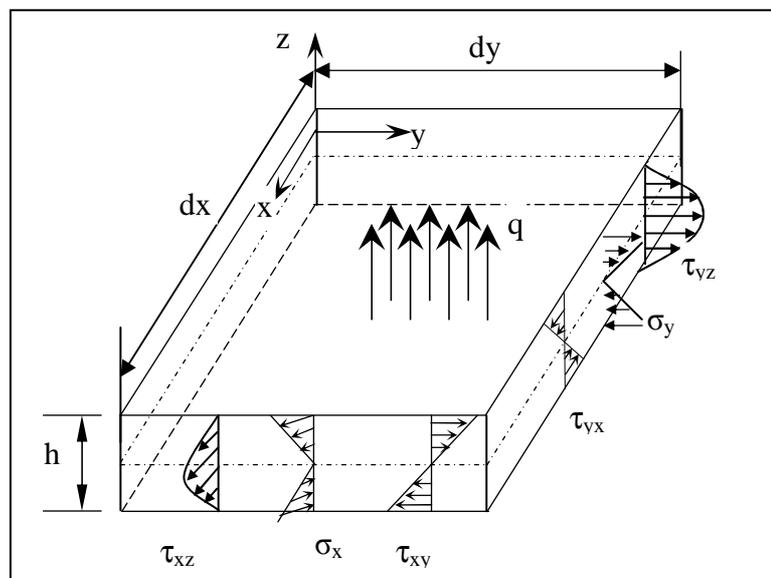
Le vecteur position du point q (Figure 2.1 ) est défini dans le repère cartésien (x,y,z) de base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par:

$$\vec{x}_q = \vec{x}_p + z\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.1)$$

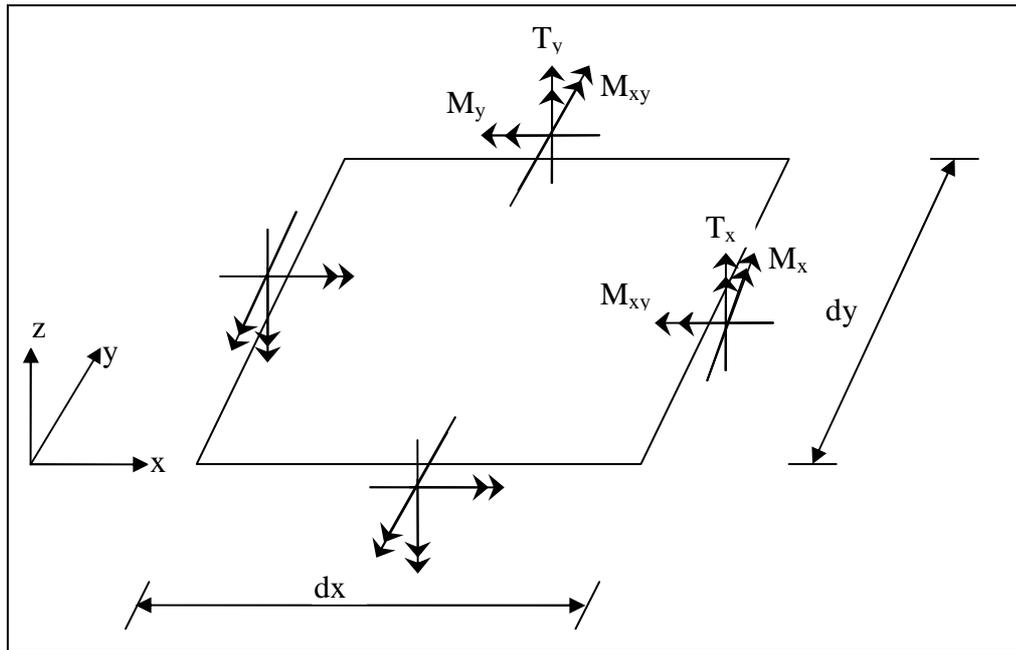
Contraintes et efforts résultants :

La figure (2.2) montre les contraintes agissant sur les sections d'un élément différentiel de plaque, soumis à une charge extérieure q suivant l'axe z et constitué d'un matériau homogène linéairement élastique.

- Les contraintes normales ( $\sigma_x, \sigma_y$ ) et de cisaillement plan  $\tau_{xy}$  sont linéaires en z et sont associées respectivement aux moments de flexion ( $M_x, M_y$ ) et de torsion  $M_{xy}$  (Figure 2.3).
- Les contraintes de cisaillement transversal (CT)  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont quadratiques en z et sont associées respectivement aux efforts tranchants  $T_x$  et  $T_y$  (Figure 2.3).



**Figure 2.2.** Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène



**Figure 2.3.** Efforts résultants

Les expressions des efforts résultants sont définies par [18, 52] :

\* Moments de flexion (Nm)

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz ; M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz ; M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (2.2)$$

\* Efforts de CT (N/m)

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz ; T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2.3)$$

Remarque :

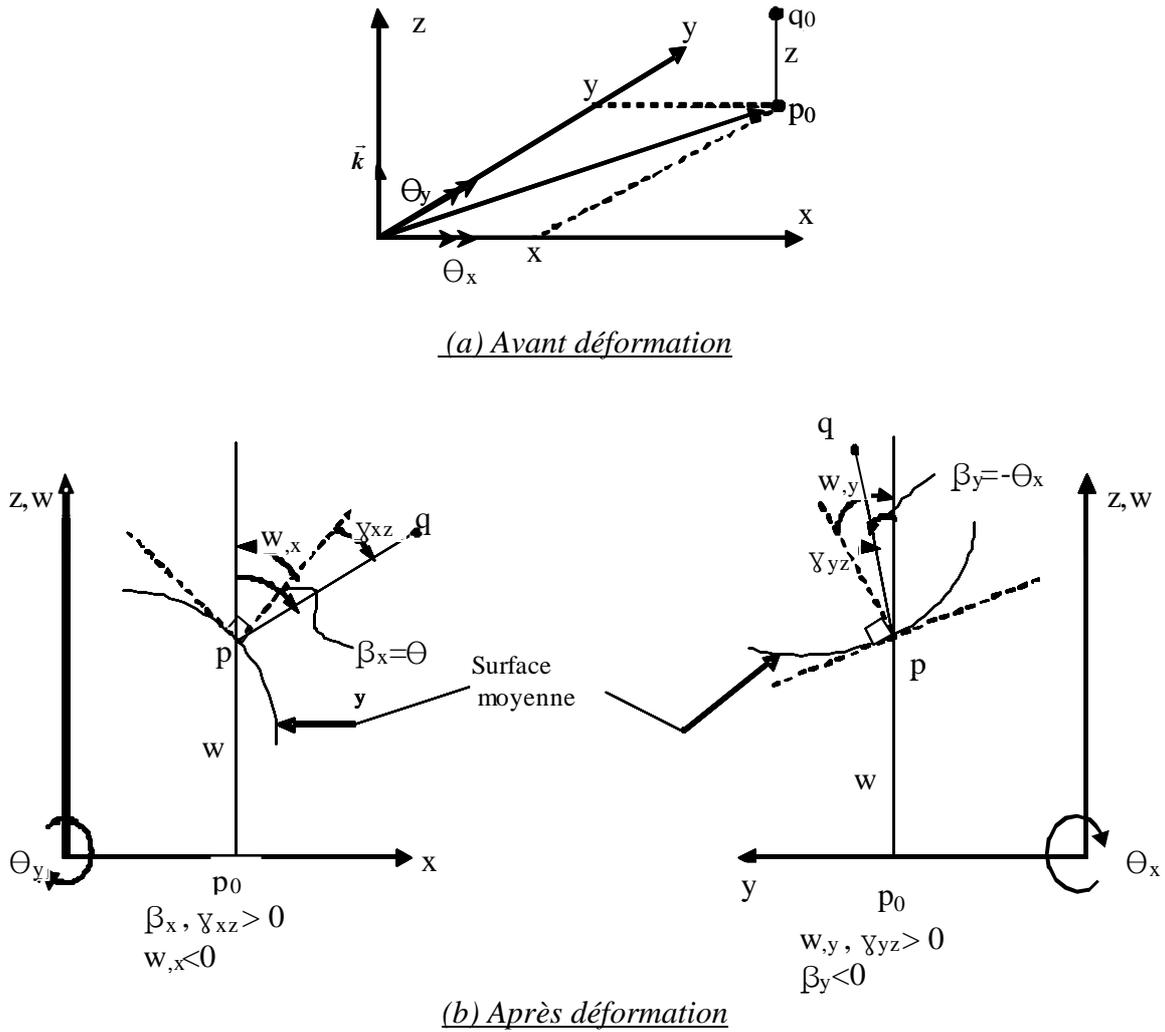
Les efforts de membrane sont données par:

$$\langle N_x \quad N_y \quad N_{xy} \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rangle dz \quad (2.4)$$

La formulation de notre modèle de plaque sera limitée à la flexion avec cisaillement transversal.

### 2.1.3. Cinématique d'une plaque de Reissner-Mindlin

a) *Déplacement d'un point quelconque q*



**Figure 2.4.** Cinématique d'un point d'une plaque en flexion/CT

Dans la configuration initiale (Figure 2.4a), le vecteur position du point quelconque  $q_0$  est donné par :

$$\bar{x}_{q_0} = \bar{x}_{p_0} + z\bar{k} ; \{\bar{x}_{q_0}\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

En considérant uniquement les effets de flexion et de CT, le vecteur position de  $q$  s'écrit dans la configuration déformée (Figure 2.4b) :

$$\bar{x}_q = \bar{x}_{q_0} + w(x, y)\bar{k} + z\bar{k} \wedge \bar{\theta} ; \{\bar{\theta}\}^T = \langle \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z \rangle \quad (2.6)$$

ou encore

$$\bar{x}_q = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z+w \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \theta_y \\ -\theta_x \\ 0 \end{Bmatrix} ; \beta_x = \theta_y \text{ et } \beta_y = -\theta_x \quad (2.7)$$

Le champs des déplacements correspondants, supposés petits entre les deux configurations Avant et Après déformation, est défini par :

$$u(x, y, z) = x_q - x_{q_0} = z\beta_x(x, y) \quad (2.8.a)$$

$$v(x, y, z) = y_q - y_{q_0} = z\beta_y(x, y) \quad (2.8.b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2.8.c)$$

$\beta_x$  et  $\beta_y$  sont les rotations du vecteur  $\overrightarrow{pq}$  dans les plans xz et yz respectivement. On peut également définir les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  des plans xz et yz autour de x et y respectivement (figure2.4).

### b) Champ des déformations

Le champ des déformations est défini par

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_s \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_x \ \boldsymbol{\varepsilon}_y \ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \rangle \quad , \quad \langle \boldsymbol{\gamma}_s \rangle = \langle \boldsymbol{\gamma}_{xz} \ \boldsymbol{\gamma}_{yz} \rangle \quad (\text{cte suivant l'épaisseur}) \quad (2.9)$$

$$\text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_x = z\boldsymbol{\beta}_{x,x} \ ; \ \boldsymbol{\varepsilon}_y = z\boldsymbol{\beta}_{y,y} \ ; \ \boldsymbol{\gamma}_{xy} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} = z(\boldsymbol{\beta}_{x,y} + \boldsymbol{\beta}_{y,x}) \quad (2.10.a)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{xz} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xz} = \boldsymbol{\beta}_x + w_{,x} \ , \ \boldsymbol{\gamma}_{yz} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_{yz} = \boldsymbol{\beta}_y + w_{,y} \quad (2.10.b)$$

Nous pouvons ainsi écrire :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_s\} = z\{\boldsymbol{\chi}\} \quad (2.11)$$

$$\text{avec} \quad \langle \boldsymbol{\chi} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}_{x,x} \ \boldsymbol{\beta}_{y,y} \ \boldsymbol{\beta}_{x,y} + \boldsymbol{\beta}_{y,x} \rangle : \text{vecteur courbures de flexion} \quad (2.12.a)$$

$$\langle \boldsymbol{\gamma} \rangle = \langle \boldsymbol{\beta}_x + w_{,x} \ \boldsymbol{\beta}_y + w_{,y} \rangle : \text{vecteur déformations de CT} \quad (2.12.b)$$

#### 2.1.4. Equations de l'équilibre statique

L'équilibre au point q de la plaque considérée comme un solide 3D particulier, est défini en général par :

$$\text{div}[\overline{\boldsymbol{\sigma}}] + \vec{f}_v = 0 \quad \text{sur le volume de la plaque} \quad (2.13)$$

ou encore ; en tenant compte de l'hypothèse des contraintes plane H3

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} + f_{vx} = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + f_{vy} = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + f_{vz} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

### 2.1.5. Lois de comportement élastique

#### a) Plaque homogène isotrope

Les relations contraintes-déformations s'écrivent pour un matériau homogène isotrope :

$$\{\sigma\} = z[H]\{\chi\} \quad ; \quad \{\tau\} = [G]\{\gamma\} \quad (2.15)$$

avec ;

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rangle$  et  $\langle \tau \rangle = \langle \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle$ , E : module d'Young,  $\nu$  : coefficient de poisson  
 $\langle \chi \rangle$  et  $\langle \gamma \rangle$  (relations 2.12a, 2.12b)

Les relations efforts résultants - déformations s'obtiennent en développant les intégrales (2.2) et (2.3) :

$$\{M\} = [H_f]\{\chi\} \quad \text{et} \quad \{T\} = [H_c]\{\gamma\} \quad (2.17)$$

avec ;

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad [H_c] = k \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

La matrice de comportement de cisaillement  $[H_c]$  dépend du coefficient k de correction du CT.  $k=5/6$  pour les matériaux isotropes [53]

#### b) Plaque composite (stratifiée)

Dans le cas où le matériau est constitué d'une stratification de couches orthotropes dans le plan LT et isotropes dans le plan TZ (figure 2.5) [12], nous pouvons écrire pour une couche :

$$\{\sigma_L\} = [H_L]\{\varepsilon_L\} ; \{\tau_L\} = [G_L]\{\gamma\} \quad (2.19a)$$

$$\langle \sigma_L \rangle = \langle \sigma_L \quad \sigma_T \quad \tau_{LT} \rangle ; \langle \tau_L \rangle = \langle \tau_{LZ} \quad \tau_{TZ} \rangle \quad (2.19b)$$

$$\langle \varepsilon_L \rangle = \langle \varepsilon_L \quad \varepsilon_T \quad \gamma_{LT} \rangle ; \langle \gamma_L \rangle = \langle \gamma_{LZ} \quad \gamma_{TZ} \rangle \quad (2.19c)$$

dans le repère d'orthotropie (L, T, Z), les matrices de comportement élastiques s'écrivent

$$[H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ & H_{TT} & 0 \\ sym & & G_{TT} \end{bmatrix}, \quad [G_L] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \quad (2.20.a)$$

$$H_{LL} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} ; H_{TT} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} ; H_{LT} = \frac{E_L\nu_{LT}}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} ; G_{TZ} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TZ})} \quad (2.20b)$$

Les matrices de transformation  $[T_1]$  et  $[T_2]$  suivantes permettent un passage du repère d'orthotropie au repère cartésien (x,y,z) :

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Ainsi, 
$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \quad , \quad \{\tau\} = [G]\{\gamma\} \quad (2.22)$$

$$[H] = [T_1]^T [H_L] [T_1] \quad , \quad [G] = [T_2]^T [G_L] [T_2] \quad , \quad c = \cos \theta \quad , \quad s = \sin \theta \quad (2.23)$$

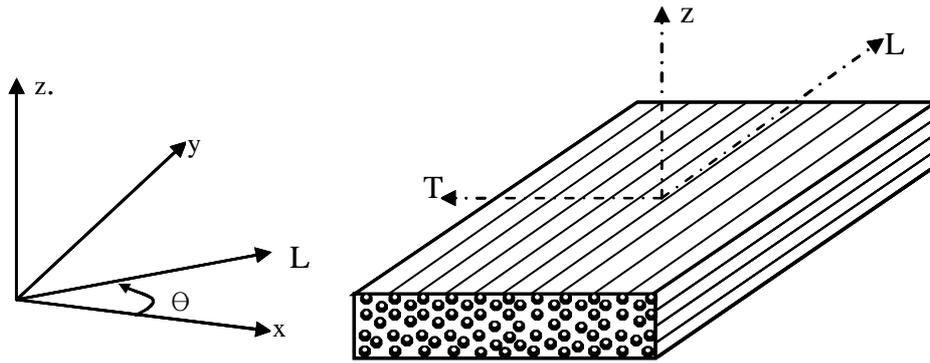
Après l'assemblage suivant l'épaisseur, les matrices de rigidité homogénéisées à l'aide de la technique de stratification seront données par (nc est le nombre de couches, voir figure 2.6)

Rigidité membrane : 
$$[H_m] = \sum_{i=1}^{nc} [H_i] (z_{i+1} - z_i)$$

Rigidité flexion : 
$$[H_f] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{nc} [H_i] (z_{i+1}^3 - z_i^3) \quad m(2.24a,b,c,d)$$

Rigidité membrane flexion : 
$$[H_{mf}] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nc} [H_i] (z_{i+1}^2 - z_i^2)$$

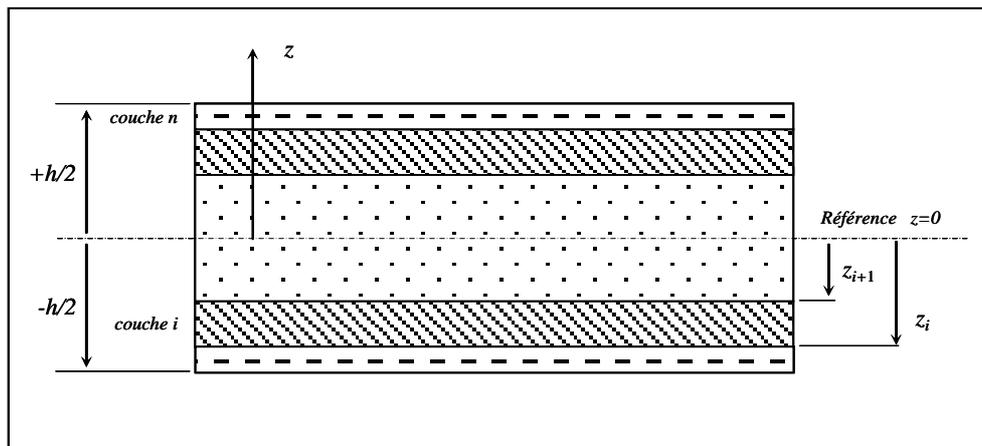
Rigidité de cisaillement transversal : 
$$[H_c] = \sum_{i=1}^{nc} [G_i] (z_{i+1} - z_i)$$



**Figure 2.5.** couche orthotrope

Nous considérerons dans la suite l'hypothèse d'isotropie transversale dans le plan TZ . Seules cinq propriétés indépendantes seront ainsi définies comme des données du matériau :

$$E_L = E_T = E_Z , \quad \nu_{LT} = \nu_{LZ} , \quad G_{LT} = G_{LZ} , \quad \nu_{TZ}$$



**Figure. 2.6.** Section d'une plaque stratifiée symétrique.

## 2.2. Formulation du modèle « Élément fini » mixte-hybride multicouches MiSP4/ml

### 2.2.1. Introduction

Nous proposons dans cette section de développer pour les plaques composites multicouches le modèle mixte-hybride dénommé MiSP4/ml (*Mixed with Shear Projection 4-nodes multilayer*), formulé et validé antérieurement par Ayad [11] pour les plaques homogènes isotropes sous le nom MiSP4.

## 2.2.2 Formulation théorique du modèle MiSP4/ml

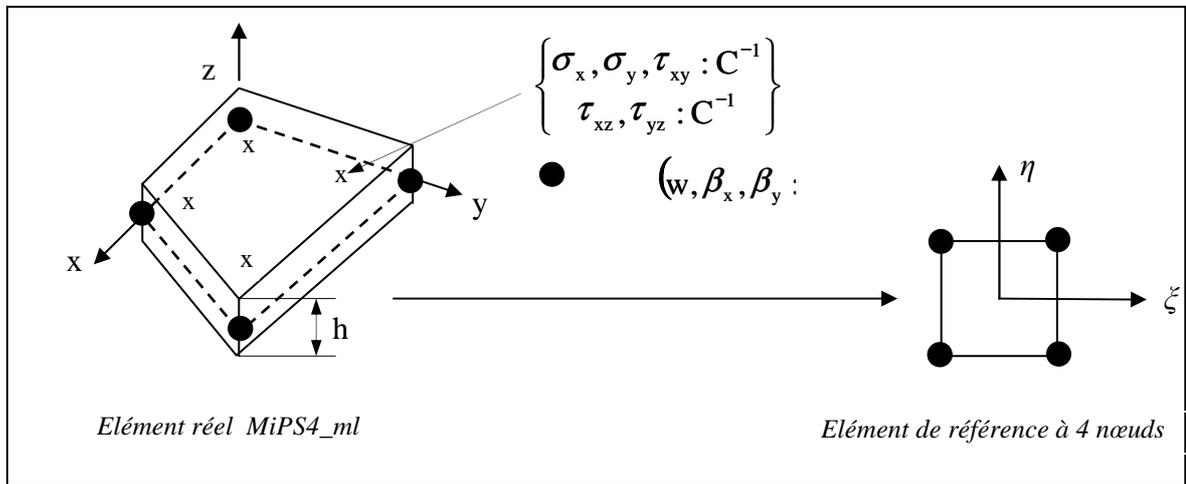
### 2.2.2.1. Géométrie de l'élément

La géométrie de l'élément MiSP4\_ml est définie par :

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (2.25)$$

$x_i$  ,  $y_i$  : sont les coordonnées des nœuds.  $N_i$  sont les fonctions d'interpolation bilinéaires classiques données par :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad ; \quad i=1,4 \quad ; \quad -1 \leq (\xi, \eta) \leq 1 \quad (2.26)$$



**Figure.2.7.** Géométrie de l'élément mixte-hybride standard

La matrice jacobienne  $[J]$  et son inverse  $[j]$  s'écrivent :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{x_n\} \\ \{y_n\} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$[j] = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad ; \quad \det J = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \quad (2.28a,b)$$

$N_{,\xi}$  et  $N_{,\eta}$  sont les dérivées des fonctions  $N_i$  par rapport à  $\xi$  et à  $\eta$  respectivement,  $\det J$  est le déterminant de la matrice Jacobienne.

### 2.2.2.2. Approximation des variables cinématiques

On définit une interpolation bilinéaire des trois variables cinématiques  $w, \beta_x$  et  $\beta_y$  (continuité  $C^0$ ) sur les 4 nœuds de l'élément :

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (2.29)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i \begin{Bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

### 2.2.2.3. Approximation des contraintes et conditions de stabilité

L'espace fonctionnel admissible pour les contraintes  $\{\sigma_s\}$  et  $\{\tau_s\}$  est de type  $C^1$ . Elles sont définies et continues localement sur l'élément. L'approximation de ces contraintes doit contenir au moins cinq termes constants et trois termes de  $\{\sigma_s\}$  linéaires en  $\zeta$  (état de contraintes pour une plaque en membrane-flexion/CT par exemple). Les paramètres d'approximation de ces deux vecteurs contraintes doivent assurer un rang correct à la matrice de rigidité élémentaire finale, obtenue après leur élimination par condensation statique. Ils doivent donc vérifier la condition de stabilité (nécessaire et non suffisante) suivante :  $n(u_n) = 12$  pour un élément de plaque à 4 nœuds )

$$n(\alpha_f) + n(\alpha_c) \geq n(u_n) - 3 \quad (2.31)$$

$n(\alpha_f)$  et  $n(\alpha_c)$  représentent le nombre des paramètres d'approximation des contraintes  $\{\sigma_s\}$  et  $\{\tau_s\}$  respectivement. Il doit être choisi de telle manière que le modèle mixte final ne soit pas équivalent au modèle en déplacement correspondant.

#### a. Approximation des contraintes dans la direction de l'épaisseur

On définit une approximation linéaire en  $\zeta$  pour  $\{\sigma_s\}$  et quadratique en  $\zeta$  pour  $\{\tau_s\}$ ,

$$\{\sigma_s\} = \{\sigma_0\} + \zeta \{\sigma_1\} \quad ; \quad \{\tau_s\} = (1 - \zeta^2) \{\tau_0\} \quad (2.32a,b)$$

$$\{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \sigma_{xy0} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \text{contraintes} \\ \text{de membrane} \end{pmatrix} \quad ; \quad \{\sigma_1\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x1} \\ \sigma_{y1} \\ \sigma_{xy1} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \text{contraintes} \\ \text{de flexion} \end{pmatrix} \quad (2.33a,b)$$

$$\{\tau_0\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz0} \\ \tau_{yz0} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \text{contraintes de CT} \\ \text{au point } p(\zeta = 0) \end{pmatrix} \quad (2.34c)$$

L'approximation des contraintes  $\{\tau_s\}$  tient compte des conditions d'équilibre sur les faces supérieure et inférieure de la plaque ( $\{\tau_s\} = \{0\}$  en  $\zeta = \pm 1$ ). Dans la formulation du modèle de plaque, supposée travailler uniquement en flexion et CT, seules les contraintes correspondantes sont considérées. Les contraintes de membrane  $\{\sigma_0\}$  seront prises en compte dans la formulation du modèle de coque (chapitre 4).

*b. Approximation des contraintes sur la surface moyenne iso-paramétrique*

Une approximation bilinéaire classique est définie pour le vecteur contraintes de flexion  $\{\sigma_1\}$  et son dual  $\langle \sigma_1^* \rangle$  (contraintes virtuelles) :

$$\{\sigma_1\} = [P_1] \{\alpha_f\} \quad ; \quad \langle \sigma_1^* \rangle = \langle \alpha_f^* \rangle [P_1]^T \quad (2.35)$$

$$[P_1] = \begin{bmatrix} \langle p \rangle & \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p \rangle \end{bmatrix}, \quad \langle p \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle \quad (2.36)$$

$$\langle \alpha_f \rangle = \langle \alpha_i \quad \dots \quad i = 1 \text{ à } 12 \rangle \quad (12 \text{ paramètres de flexion}) \quad (2.37)$$

Douze paramètres de flexion  $\alpha_f$  seront ainsi éliminés par condensation statique au niveau de l'élément.

La définition de l'approximation du vecteur des contraintes de CT  $\{\tau_0\}$  (2.32b) n'est plus explicite. Celle ci s'obtient à partir de l'expression de  $\{\sigma_1\}$  (2.35) en satisfaisant deux des trois équations de l'équilibre tridimensionnel en contraintes, définies respectivement selon les axes  $x$  et  $y$  par :

$$\begin{cases} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} - f_x = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} - f_y = 0 \end{cases} \quad (\text{équations 2.14})$$

$f_x$  et  $f_y$  sont des forces de volume fonctions des variables  $(x, y)$ . Une écriture des contraintes de CT  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  s'obtient en utilisant une intégration par parties, sachant que  $\int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz = 0$  et que les deux contraintes sont nulles aux interfaces ( $z = \pm h/2$ ).

Il en résulte que

$$\int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} \end{Bmatrix} dz \quad (2.38)$$

$\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont les composantes du vecteur  $\{\sigma_s\}$  (2.32a).  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont les composantes du vecteur  $\{\tau_s\}$  (2.32b). En appliquant les approximations définies pour les vecteurs  $\{\sigma_s\}$  et  $\{\tau_s\}$  (équations 2.32), sachant que  $dz = \frac{h}{2}d\zeta$ , nous obtenons l'expression suivante du vecteur  $\{\tau_o\}$  faisant intervenir les paramètres de flexion  $\{\alpha_f\}$  au nombre de douze :

$$\{\tau_o\} = \frac{h}{4} \text{div}[\sigma_i] \quad (2.39)$$

Avec ;

$$\{\text{div}[\sigma_i]\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x1,x} + \tau_{xy1,y} \\ \tau_{xy1,x} + \sigma_{y1,y} \end{array} \right\} = [P_\tau]\{\alpha_f\} \quad (2.40)$$

$$[P_\tau] = \begin{bmatrix} \langle p_1 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle & \langle p_1 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\langle p_1 \rangle = \langle 0 \quad j_{11} \quad j_{12} \quad \eta_{11} + \xi_{12} \rangle ; \langle p_2 \rangle = \langle 0 \quad j_{21} \quad j_{22} \quad \eta_{21} + \xi_{22} \rangle \quad (2.42)$$

La condition de stabilité (2.31), qui devient ainsi  $n(\alpha_f) \geq n(u_n) - 3$ , est par conséquent satisfaite.

#### 2.2.2.4. Approximation des champs de déformations

##### a. Déformations de flexion

Les déformations de membrane n'étant pas considérées dans cette formulation, le vecteur des déformations  $\{\varepsilon_s\}$  s'écrit (voir équation 2.11) :

$$\{\varepsilon_s\} = \zeta \{\varepsilon_i\} \quad (2.43)$$

avec  $\{\varepsilon_i\} = \frac{h}{2} \{\chi\}$  et  $\{\chi\} = [B_1]\{u_n\}$  ( $\{\chi\}$  courbures de flexion) (2.44)

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{i,y} & \dots \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & \dots \end{bmatrix} ; \langle u_n \rangle = \langle w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \quad \dots i=1,4 \rangle \quad (2.45)$$

$$N_{i,x} = j_{11}N_{i,\xi} + j_{21}N_{i,\eta} \quad \text{et} \quad N_{i,y} = j_{21}N_{i,\xi} + j_{22}N_{i,\eta} \quad (2.46)$$

##### b. Déformations naturelles de CT. Utilisation de la méthode ANS

Dans la plupart des modèles mixtes classiques, le verrouillage en CT provenait essentiellement de la définition numérique des déformations de CT  $\{\gamma_s\}$  (équation 2.12b). Ce problème numérique est la conséquence d'une approximation bilinéaire des variables cinématiques  $(w, \beta_x, \beta_y)$ , utilisée pour évaluer les déformations de CT. Certes, une intégration réduite de la matrice de rigidité correspondante de CT contribue à l'élimination du verrouillage, mais avec pour conséquences l'apparition de modes parasites (faux mécanismes d'énergie nulle), qui peuvent ne pas disparaître même après assemblage de plusieurs éléments, et surtout une sensibilité des éléments finis aux distorsions géométriques. Pour éviter tous ces problèmes numériques, nous avons adopté, dans le cas du modèle MiSP4\_ml, la technique des déformations de CT de substitution (Méthode ANS : Assumed Natural Strain) proposée par Bathe et al [54,55].

Nous commençons par définir les déformations cartésiennes  $\{\gamma_0\}$  en fonctions des déformations isoparamétriques  $\{\gamma_\xi\}$  que nous interpolons linéairement deux à deux sur les bords élémentaires (figure 2.8) :

$$\{\gamma_0\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [j] \{\gamma_\xi\} \quad (2.47)$$

$$\{\gamma_\xi\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = [A] \{\gamma_{\xi k}\} \quad (2.48)$$

$$[A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} ; \langle \gamma_{\xi k} \rangle = \langle \gamma_{\xi z}^A \quad \gamma_{\eta z}^B \quad \gamma_{\xi z}^C \quad \gamma_{\eta z}^D \rangle \text{ (figure 2.8)}$$

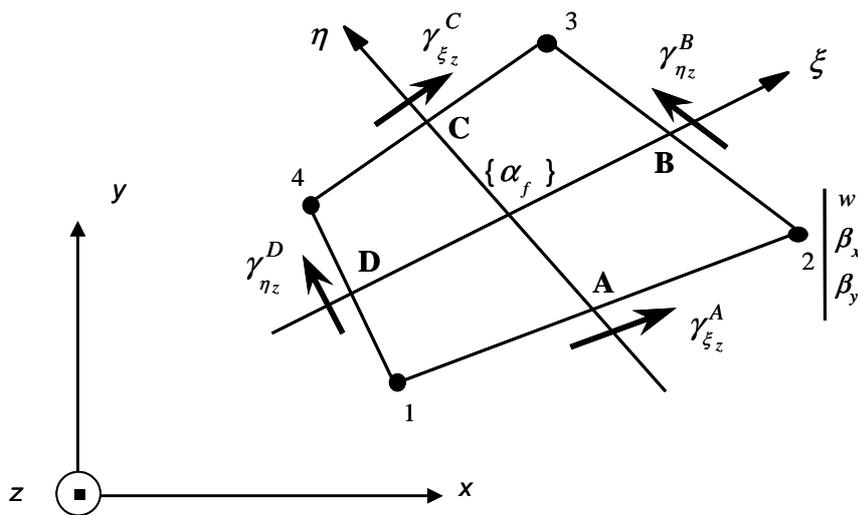


Figure.2.8. Déformations de CT de bords

Les déformations naturelles ou isoparamétriques de bord  $\langle \gamma_{\xi k} \rangle$  sont projetées sur les ddl aux nœuds sous une forme discrète définie par une intégrale de contour le long de chaque côté. Ce sont les hypothèses discrètes de Mindlin que nous écrivons comme suit :

$$\int_{-1}^{+1} (\gamma_{\xi} - w_{,\xi} - \beta_{\xi}) d\xi = 0 \quad (\text{cotés 1-2 et 3-4}) \quad (2.49)$$

$$\int_{-1}^{+1} (\gamma_{\eta} - w_{,\eta} - \beta_{\eta}) d\eta = 0 \quad (\text{cotés 2-3 et 4-1}) \quad (2.50)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_{\xi} \\ \beta_{\eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} ; [J] \text{ (équ. 2.27a)} \quad (2.51)$$

Les équations (2.50 , 2.49) permet d'aboutir aux déformations naturelles de bords :

$$\begin{cases} \gamma_{\xi}^A = \frac{1}{2}(w_2 - w_1 + \beta_{\xi 1} + \beta_{\xi 2}) \\ \gamma_{\xi}^C = \frac{1}{2}(w_3 - w_4 + \beta_{\xi 3} + \beta_{\xi 4}) \\ \gamma_{\eta}^D = \frac{1}{2}(w_4 - w_1 + \beta_{\eta 1} + \beta_{\eta 4}) \\ \gamma_{\eta}^B = \frac{1}{2}(w_3 - w_2 + \beta_{\eta 2} + \beta_{\eta 3}) \end{cases} \quad (2.52)$$

l'introduction de (2.51) dans (2.52) conduit à :

$$\{\gamma_{\xi k}\} = [B_{cs}] \{u_n\} ; \langle u_n \rangle = \langle w_i \beta_{xi} \beta_{yi} \ i=1,4 \rangle \quad (2.53)$$

La substitution des équations (2.53) dans (2.47 , 2.48 ) conduit finalement à la matrice  $[\bar{B}_c]$  des déformations naturelles de CT :

$$[\bar{B}_c] = [j][A][B_{cs}] \quad (2.54)$$

Ainsi, le vecteur des déformations cartésiennes de CT  $\{\gamma_0\}$  aura comme expression finale :

$$\{\gamma_0\} = [\bar{B}_c] \{u_n\} \quad (2.55)$$

$[j]$  est la matrice Jacobienne inverse (équation 2.28). La matrice  $[B_{cs}]$  est présentée dans l'annexe (B).

### 2.2.3 Formulation variationnelle mixte-hybride projetée en cisaillement transversal, Matrice de rigidité élémentaire

Dans cette section, le principe des travaux virtuels défini sous sa forme mixte-hybride sera développé en prenant en compte le caractère multicouche d'une plaque à n couches

symétriques par rapport à la surface moyenne (Figure 2.6). Les coordonnées transversales  $z_i$  et  $z_{i+1}$  d'une couche  $i$  dans le repère global apparaîtront le plus naturellement possible dans le formalisme variationnel.

La forme variationnelle mixte-hybride traduisant l'équilibre au sens de Hellinger-Reissner d'une plaque composite multicouches en flexion/CT s'écrit

$$W = \sum_e (W_{int}^e - W_{ext}^e) = 0 \quad \forall (w^*, \beta_x^*, \beta_y^*) \quad (2.56)$$

$W_{int}^e$  est le travail virtuel interne élémentaire,  $W_{ext}^e$  le travail élémentaire des forces extérieures. En faisant apparaître les travaux virtuels élémentaires de flexion  $W_f$  et de cisaillement transversal  $W_c$ , l'expression de  $W_{int}^e$  s'écrit

$$W_{int}^e = W_f + W_c \quad (2.57)$$

$$\text{avec} \quad W_f = \int_{V^e} (\langle \varepsilon_s^* \rangle \{ \sigma_s \} + \langle \sigma_s^* \rangle \{ \varepsilon_s \} - \langle \sigma_s^* \rangle [H]^{-1} \{ \sigma_s \}) dV \quad (2.58)$$

$$\text{et} \quad W_c = \int_{V^e} (\langle \gamma_s^* \rangle \{ \tau_s \} + \langle \tau_s^* \rangle \{ \gamma_s \} - \langle \tau_s^* \rangle [G]^{-1} \{ \tau_s \}) dV \quad (2.59)$$

### 2.2.3.1 Intégration explicite suivant de $W_f$ . Prise en compte du caractère multicouche d'une plaque composite

Dans un premier temps, nous intégrons explicitement la forme  $W_f$  suivant l'épaisseur, avec  $\{ \varepsilon_s \} = \zeta \{ \varepsilon_1 \}$  et  $\{ \sigma_s \} = \zeta \{ \sigma_1 \}$ . Nous obtenons :

$$W_f = \int_{A^e} \frac{h}{3} \langle \varepsilon_1^* \rangle \{ \sigma_1 \} dA + \int_{A^e} \frac{h}{3} \langle \sigma_1^* \rangle \{ \varepsilon_1 \} dA + W_{f\sigma} \quad (2.60)$$

$$\text{avec} \quad W_{f\sigma} = - \int_{A^e} \langle \sigma_1^* \rangle \frac{4}{h^2} \left( \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [H]^{-1} dz \right) \{ \sigma_1 \} dA \quad (2.61)$$

Pour prendre en compte l'aspect « multicouche » d'une plaque composite, le terme intégré sur l'épaisseur  $\left( \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [H]^{-1} dz \right)$  de  $W_{f\sigma}$  sera défini comme suit : ( $nc$  est le nombre de couches)

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [H]^{-1} dz = \frac{h^6}{12^2} \left( \frac{z_2^3 - z_1^3}{3} [H]_1 + \dots + \frac{z_{nc}^3 - z_{nc-1}^3}{3} [H]_{nc} \right)^{-1} = \frac{h^6}{12^2} \sum_{i=1}^{nc} \left( \frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3} [H]_i \right)^{-1} \quad (2.62)$$

Pour réaliser l'égalité dans l'équation (2.62) en cas isotrope entre le premier et le deuxième terme, il faut multiplier  $\frac{h^6}{12^2}$

Ce qui conduirait à l'expression finale suivante de  $W_f$

$$W_f = \int_{A^e} \frac{h}{3} \langle \varepsilon_1^* \rangle \{\sigma_1\} dA + \int_{A^e} \frac{h}{3} \langle \sigma_1^* \rangle \{\varepsilon_1\} dA - \frac{h^4}{36} \int_{A^e} \langle \sigma_1^* \rangle [\bar{H}_f] \{\sigma_1\} dA \quad (2.63)$$

avec

$$[\bar{H}_f] = \sum_{i=1}^{nc} \left( \frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3} [H]_i \right)^{-1} \quad (2.64)$$

### 2.2.3.2 Intégration explicite suivant l'épaisseur de $W_c$ . Prise en compte du caractère multicouche d'une plaque composite

En tenant compte de l'approximation quadratique selon  $\zeta$  de  $\{\tau_s\}$  (équation 2.32b),  $\{\gamma_s\}$  étant constant en  $\zeta$  ( $\{\gamma_s\} = \{\gamma_0\}$ , équation 2.55), l'intégration explicite de  $W_c$  suivant l'épaisseur conduit à :

$$W_c = \int_A \frac{2h}{3} \langle \gamma_0^* \rangle \{\tau_0\} dA + \frac{2h}{3} \langle \tau_0^* \rangle \{\gamma_0\} dA - \int_A \langle \tau_0^* \rangle [\bar{H}_c] \{\tau_0\} dA \quad (2.65)$$

avec

$$[\bar{H}_c] = \sum_{i=1}^{nc} \left[ (z_{i+1} - z_i) + \frac{16}{5h^4} (z_{i+1}^5 - z_i^5) - \frac{8}{3h^2} (z_{i+1}^3 - z_i^3) \right] [G]_i^{-1} \quad (2.66)$$

### 2.2.3.3 Matrice de rigidité élémentaire

En se basant sur les approximations définies pour les déformations et les contraintes (équations 2.35, 2.39, 2.44 et 2.55), les formes variationnelles  $W_f$  et  $W_c$  feront apparaître les différentes matrices de rigidité mixte. Nous écrivons :

$$W_f = \langle u_n^* \rangle [k_{lu}]^T \{\alpha_f\} + \langle \alpha_f^* \rangle [k_{lu}] \{u_n\} - \langle \alpha_f^* \rangle [k_l] \{\alpha_f\} \quad (2.67)$$

$$W_c = \langle u_n^* \rangle [k_{nu}]^T \{\alpha_f\} + \langle \alpha_f^* \rangle [k_{nu}] \{u_n\} - \langle \alpha_f^* \rangle [k_\tau] \{\alpha_f\} \quad (2.68)$$

Avec respectivement ;

$$[k_{lu}] = \frac{h^2}{6} \int_A [P_l]^T [B_l] dA ; [k_l] = \frac{h^4}{36} \int_A [P_l]^T [\bar{H}_f] [P_l] dA \quad (\text{partie flexion}) \quad (2.69)$$

$$[k_{nu}] = \frac{h^2}{6} \int_A [P_\tau]^T [\bar{B}_c] dA ; [k_\tau] = \frac{h^2}{16} \int_A [P_\tau]^T [\bar{H}_c] [P_\tau] dA \quad (\text{partie CT}) \quad (2.70)$$

Le travail virtuel interne  $W_{int}^e$  (équation 2.57) s'écrit sous forme matricielle :

$$W_{int}^e = \langle \alpha_f^* \rangle \langle u_n^* \rangle \langle [k_{mixte}] \left\{ \begin{matrix} \{\alpha_f\} \\ \{u_n\} \end{matrix} \right\} \rangle ; [k_{mixte}] = \begin{bmatrix} -[k_{fc}] & [k_{cu}] \\ [k_{cu}]^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$[k_{fc}] = [k_l] + [k_\tau] ; [k_{cu}] = [k_{lu}] + [k_{nu}] \quad (2.72)$$

La condensation statique au niveau local des paramètres  $\{\alpha_f\}$  se traduit par :

$$\{\alpha_f\} = [k_{fc}]^{-1} [k_{cu}] \{u_n\} \quad (2.73)$$

Ce qui conduirait à l'expression finale de la matrice de rigidité de l'élément mixte-hybride multicouches MiSP4-ml :

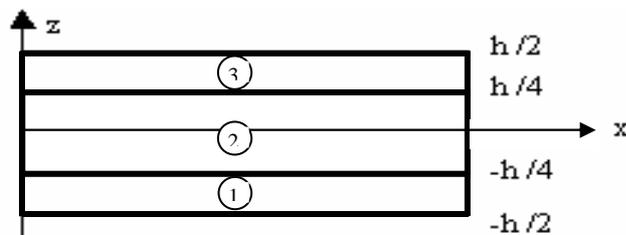
$$[k_e] = [k_{cu}]^T [k_{fc}]^{-1} [k_{cu}] \quad (2.74)$$

Remarque sur l'intégration numérique des différentes matrices :

Un schéma à 2x2 points de Gauss permet l'intégration exacte de l'ensemble des matrices mixtes précédentes.

#### 2.2.4. Facteur de correction du CT pour le cas isotrope

Dans cette section, nous montrons comment retrouver à travers les développements théoriques précédents la valeur 5/6 du facteur k de correction du CT correspondant à une section homogène isotrope. Considérons par exemple le cas d'une stratification à trois couches ayant les mêmes propriétés élastiques et le même angle d'orientation (figure 2.9).



**Figure.2.9.** Stratification de trois couches ayant la même orientation de fibre

On se basera sur l'expression (2.65) du travail virtuel de CT  $W_c^e$

$$W_c^e = \int_A \frac{2h}{3} \langle \gamma_0^* \rangle \{\tau_0\} dA + \frac{2h}{3} \langle \tau_0^* \rangle \{\gamma_0\} dA - \int_A \langle \tau_0^* \rangle [\bar{H}_c] \{\tau_0\} dA \quad (\text{équation 2.65})$$

Le vecteur des efforts résultants de CT  $\{T\}$  s'écrit en intégrant selon l'épaisseur le vecteur des contraintes correspondantes  $\{\tau_s\}$  :

$$\{T\} = \int_{-h/2}^{h/2} (1 - \zeta^2) \{\tau_0\} dz = \frac{2h}{3} \{\tau_0\} \quad (2.75)$$

Dans le cas des matériaux homogènes isotropes, l'expression de  $W_c^e$  s'écrit classiquement en termes des efforts résultants de CT :

$$W_c^e = \int_{A^e} \left( \langle \gamma_0^* \rangle \{T\} + \langle T^* \rangle \{\gamma_0\} - \frac{1}{kh} \langle T^* \rangle [G]^{-1} \{T\} \right) dA \quad (2.76)$$

Une identification des deux expressions de  $W_c^e$  conduit par conséquent à

$$\begin{aligned} \frac{1}{kh} \langle T^* \rangle [G]^{-1} \{T\} &= \frac{9}{4h^2} \langle T^* \rangle \left( \sum_{i=1}^{nc} [(z_{i+1} - z_i) + \frac{16}{5h^4} (z_{i+1}^5 - z_i^5) - \frac{8}{3h^2} (z_{i+1}^3 - z_i^3)] [G]_i^{-1} \right) \{T\} \\ &= \frac{9}{4h^2} \langle T^* \rangle \left( \frac{3h}{15} \right) [G]^{-1} \{T\} \\ &= \langle T^* \rangle \left( \frac{6}{5h} \right) [G]^{-1} \{T\} \end{aligned}$$

Ce qui donnerait  $k=5/6$ .

## 2.2.5. Expression des contraintes tridimensionnelles et des efforts résultants

### 2.2.5.1. Contraintes $\{\sigma_s\}$ et $\{\tau_s\}$

Les contraintes de flexion  $\{\sigma_1\}$  (2.35) et de CT  $\{\tau_0\}$  (2.39) sont évaluées en utilisant les expressions des paramètres  $\{\alpha_f\}$  (2.73). Elles sont données par :

$$\{\sigma_1(\xi, \eta)\} = [P_1] [k_{fc}]^{-1} [k_{cu}] \{u_n\} \quad (\text{contraintes de flexion}) \quad (2.77)$$

$$\{\tau_0(\xi, \eta)\} = \frac{h}{4} [P_\tau] [k_{fc}]^{-1} [k_{cu}] \{u_n\} \quad (\text{contraintes de CT}) \quad (2.78)$$

Les contraintes au point quelconque  $q$  de la plaque étant définies par les équations 2.32 sans les contraintes de membrane, c'est à dire

$$\{\sigma_s\} = \zeta \{\sigma_1\} \quad ; \quad \{\tau_s\} = (1 - \zeta^2) \{\tau_0\} \quad (2.79a,b)$$

### 2.2.5.2. Efforts résultants $\{M\}$ et $\{T\}$

Les efforts résultants correspondants sont définis dans le repère cartésien :

- Moments de flexion :  $\langle M \rangle = \langle M_x \quad M_y \quad M_{xy} \rangle$  (équations 2.2)

$$\{M(\xi, \eta)\} = \frac{h^2}{6} \{\sigma_1(\xi, \eta)\} = \frac{h^2}{6} [P_1(\xi, \eta)] [k_{fc}]^{-1} [k_{ca}] \{u_n\} \quad (2.80)$$

- Efforts de CT :  $\langle T \rangle = \langle T_x \quad T_y \rangle$  (équations 2.3)

$$\{T(\xi, \eta)\} = \frac{2h}{3} \{\tau_0(\xi, \eta)\} = \frac{h^2}{6} [P_\tau(\xi, \eta)] [k_{fc}]^{-1} [k_{ca}] \{u_n\} \quad (2.81)$$

Remarque sur l'implémentation numérique des vecteurs contraintes précédents :

L'implémentation numérique des expressions des contraintes (2.77), (2.78) et (2.79) montre que les résultats de ces mêmes contraintes ne traduisent pas le comportement par couche. Une meilleure façon de représenter les contraintes  $\{\sigma_s\}$  et  $\{\tau_s\}$  par couche est de les calculer à partir des équations tridimensionnelles d'équilibre. Nous avons adopté pour cela la technique proposée par Lardeur [8]. Elle sera développée dans la section suivante.

### 2.2.5.3. Contraintes tridimensionnelles multicouches. Utilisation des équations d'équilibre

Nous avons adopté l'approche proposée par Batoz et Dhatt [18]. La contrainte de flexion en fonction de l'épaisseur est obtenue de la manière suivante :

On part de l'équation  $\{\sigma\} = \frac{2z}{h} \{\sigma_1\} = \frac{2z}{h} [H] \{\varepsilon_1\} = z[H] [\bar{H}_f] \{M\}$  (2.24), nous écrivons

$$\{\sigma(z)\} = z[A(z)] \{M\} \text{ où } [A(z)] = [H(z)] [\bar{H}_f] \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \rangle \quad (2.82)$$

En considérant l'équation (2.32), nous retrouvons :  $[\bar{H}_f] = \left( \sum_{i=1}^{nc} \frac{(z_{i+1}^3 - z_i^3)}{3} [H]_i \right)^{-1}$ ,

Pour chaque couche on écrit :  $[H(z)] = [T_i]^T [H_L] [T_i]$  (2.23) ;

Où :

$[T_i]$  : matrice de transformation du repère d'orthotrope au repère global,

$[H_L]$  : matrice de comportement local .

$\{M\}$  : est présenté dans l'équation (2.80)

On peut calculer le vecteur de contraintes de flexion directement par la formulation mixte-hybride en utilisant la méthode suivante :

Pour une plaque, sur la couche  $i$ , les contraintes sont définies en fonction de  $z$  : ( $z_i < z < z_{i+1}$ )

$$\{\sigma_s(z)\} = \frac{2z}{h} \{\sigma_1\}_i \quad (2.83)$$

$$\text{où } \{\sigma_l\}_i = [P_l]\{\alpha_f\}_i, \{\alpha_f\}_i = [k_{fc}]_i^{-1}[k_{cu}]_i\{u_n\} \quad (2.73)$$

$[k_{fc}]_i$  et  $[k_{cu}]_i$  sont calculées pour une couche  $z_{i+1} < z < z_i$  en partant de l'équation (2.67) jusqu'à (2.72) sans prendre en compte l'aspect multicouche :

$$\begin{aligned} [k_{fc}]_i &= \int_A \frac{4}{3h^2} [P_l]^T (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H]_i^{-1} [P_l] dA + \\ & \frac{h^2}{16} \int_A [P_\tau]^T \left( (z_{i+1} - z_i) + \frac{16}{5h^4} (z_{i+1}^5 - z_i^5) - \frac{8}{3h^2} (z_{i+1}^3 - z_i^3) \right) [G]_i^{-1} [P_\tau] dA \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$[k_{cu}]_i = \int_A \frac{4}{3h^2} (z_{i+1}^3 - z_i^3) [P_l]^T [B_l] dA + \int_A \frac{h}{4} \left( z_{i+1} - z_i - \frac{2}{3h} (z_{i+1}^3 - z_i^3) \right) [P_\tau]^T [B_c] dA \quad (2.85)$$

En se basant sur les équations s'équilibre, les contraintes de cisaillement transversal s'écrivent :

$$\tau_{xz} = \int_{-t}^z (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) dz ; \tau_{yz} = \int_{-t}^z (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dz \quad (2.86)$$

$\{\sigma_s\} = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rangle^T$  est donné par l'équation (2.32a)

Le vecteur des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur s'écrit :

$$\{\tau_s\} = [D_1]\{T\} + [D_2]\{\lambda\} \quad (2.87)$$

avec ;

$$[D_1] = \int_{-t}^z \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} dz, \quad [D_2] = \int_{-t}^z \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix} dz \quad (2.88a,b)$$

où  $t$  est la coordonnée de la surface en bas ou haut d'une couche,  $z$  global est la coordonnée dans une couche à calculer ;

Pour la démonstration de  $[D_1]$  et  $[D_2]$  voir l'annexe A.

$$\{T\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\tau_s\} dz = \frac{h^2}{6} [P_\tau][k_f]^{-1}[k_{cu}]\{u_n\} \quad (2.89)$$

$$\langle \lambda \rangle = \langle M_{x,x} - M_{xy,y} ; M_{xy,x} - M_{y,y} ; M_{y,x} ; M_{x,y} \rangle \quad (2.90)$$

$$\{\tau_s\} \text{ eq (2.79b)}$$

Après le developpement de  $\{M\}$  équ(2.80), nous obtenons

$$\begin{cases} M_x = \frac{h^2}{6}(\alpha_1 + \xi\alpha_2 + \alpha_3\eta + \xi\eta\alpha_4) \\ M_y = \frac{h^2}{6}(\alpha_5 + \xi\alpha_6 + \alpha_7\eta + \xi\eta\alpha_8) \\ M_{xy} = \frac{h^2}{6}(\alpha_9 + \xi\alpha_{10} + \eta\alpha_{11} + \xi\eta\alpha_{12}) \end{cases} \quad (2.91)$$

Ainsi

$$\{\lambda\} = [P_m]\{\alpha_f\} \quad (2.92)$$

où :

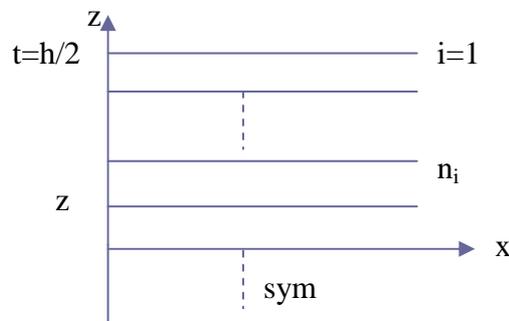
$$P_m = \begin{bmatrix} 0 & j_{11} & j_{21} & \eta j_{11} + \xi j_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j_{11} \\ 0 & j_{12} & j_{22} & \eta j_{12} + \xi j_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j_{21} & -j_{22} & -(\eta j_{12} + \xi j_{22}) \\ -j_{22} & -\eta \xi j_{12} + \xi j_{22} & 0 & j_{11} & j_{21} & \eta j_{11} + \xi j_{21} \\ j_{21} & \eta j_{11} + \xi j_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 12} \quad (2.93)$$

Après l'intégration de  $[D_1]$  et  $[D_2]$ , nous obtenons

$$[D_1] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_i} (t^2 - z^2)_i \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix}_i \quad (2.94)$$

$$[D_2] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_i} (t^2 - z^2)_i \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix}_i \quad (2.95)$$

$n_i$  est le numéro de la couche pour laquelle les deux contraintes de CT sont calculées (figure 2.10)



**Figure 2.10.** une stratification à trois couches

### 2.2.6. Formulation de la matrice masse élémentaire

La formulation de la matrice masse élémentaire est nécessaire pour évaluer le comportement des plaques multicouches en vibrations libres ou forcées. Nous l'avons développée à partir de l'expression suivante de l'énergie cinétique  $V$  :

$$V = \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (2.96)$$

( $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ ) sont les composantes du vecteur vitesse du point quelconque  $q$  de la plaque.  $\rho$  est la masse volumique représentative du volume  $V^e$ .

en général,  $\dot{u} = \dot{U} + z\dot{\beta}_x$ ,  $\dot{v} = \dot{V} + z\dot{\beta}_y$  avec  $\dot{\beta}_x = \dot{\theta}_y$  et  $\dot{\beta}_y = -\dot{\theta}_x$

$$V = \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho (\dot{U}\dot{U} + z\dot{U}\dot{\theta}_y + z\dot{\theta}_y\dot{U} + z^2\dot{\theta}_y\dot{\theta}_y + \dot{V}\dot{V} - z\dot{V}\dot{\theta}_x - z\dot{\theta}_x\dot{V} + z^2\dot{\theta}_x\dot{\theta}_x + \dot{W}^2) dv \quad (2.97)$$

On considère les approximation de  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$ ,  $\dot{W}$ ,  $\dot{\theta}_x$ ,  $\dot{\theta}_y$  (présentés dans l'annexe A), nous obtenons :

$$V = \frac{1}{2} \langle \dot{u}_n \rangle \left( \begin{array}{l} c_1 \int_A (\{N_u\}\langle N_u \rangle + \{N_v\}\langle N_v \rangle + \{N_w\}\langle N_w \rangle) dA + \\ c_2 \int_A (\{N_u\}\langle N_{\theta_y} \rangle + \{N_{\theta_y}\}\langle N_u \rangle - \{N_v\}\langle N_{\theta_x} \rangle - \{N_{\theta_x}\}\langle N_v \rangle) dA + c_3 \int_A (\{N_{\theta_y}\}\langle N_{\theta_y} \rangle + \{N_{\theta_x}\}\langle N_{\theta_x} \rangle) dA \end{array} \right) \{ \dot{u}_n \}$$

d'où

$$c_1 = \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1} - z_i) \rho_i, \quad c_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1}^2 - z_i^2) \rho_i, \quad c_3 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1}^3 - z_i^3) \rho_i \quad (2.98)$$

$\rho_i$  : masse volumique pour la couche  $i$  ;

Les vecteurs  $\{N_u\}$ ,  $\{N_v\}$ ,  $\{N_w\}$ ,  $\{N_{\theta_x}\}$ ,  $\{N_{\theta_y}\}$  sont présentées dans l'annexe (A).

La matrice  $[M]$  est définie par :

$$V = \frac{1}{2} \langle \dot{u}_n \rangle [M] \{ \dot{u}_n \} \quad ; \quad (\langle \dot{u}_n \rangle : \text{vecteur de vitesses nodales}) \quad (2.99)$$

Si nous prenons  $\dot{U} = \dot{V} = 0$ , nous obtiendrons une matrice masse pour la plaque. Un certain nombre de tests ont été effectués dans le but d'examiner l'influence de l'épaisseur sur les fréquences propres de vibrations libres.

## Chapitre 3

### VALIDATION NUMERIQUE DE L'ÉLÉMENT DE PLAQUE COMPOSITE MiSP4/ml

#### 3.1. Introduction et objectifs

L'élément fini de plaque mixte-hybride multicouche MiSP4/ml est de géométrie simple avec les trois degrés de liberté couramment utilisés par l'ingénieur ( $w, \beta_x, \beta_y$ ). Il devra pour cela être validé sur le plan pratique et industriel. Il a été formulé et validé pour les plaques homogènes isotropes par Ayad [11].

Dans ce chapitre, nous proposons de valider l'extension du modèle en composites multicouches à travers quelques tests standards connus de la littérature. Il s'agit essentiellement d'évaluer ses performances en précision sur les déplacements et les contraintes.

Rappelons que notre élément MiSP4/ml est formulé sans facteurs de correction de CT. Il a été appliqué à l'ensemble des tests proposés quelque soit le nombre de couches ou de stratifications.

#### 3.2. Résultats des cas-tests standards de plaques composites multicouches

##### 3.2.1 Plaque carrée composite à 3 et 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal [8]

Cet exemple a été proposé et traité par Pagano et Hatfield [56]. Le matériau de base est un composite unidirectionnel fortement orthotrope. Les données physiques du problème sont décrites sur la figure 3.1. Deux types de stratification sont étudiés :

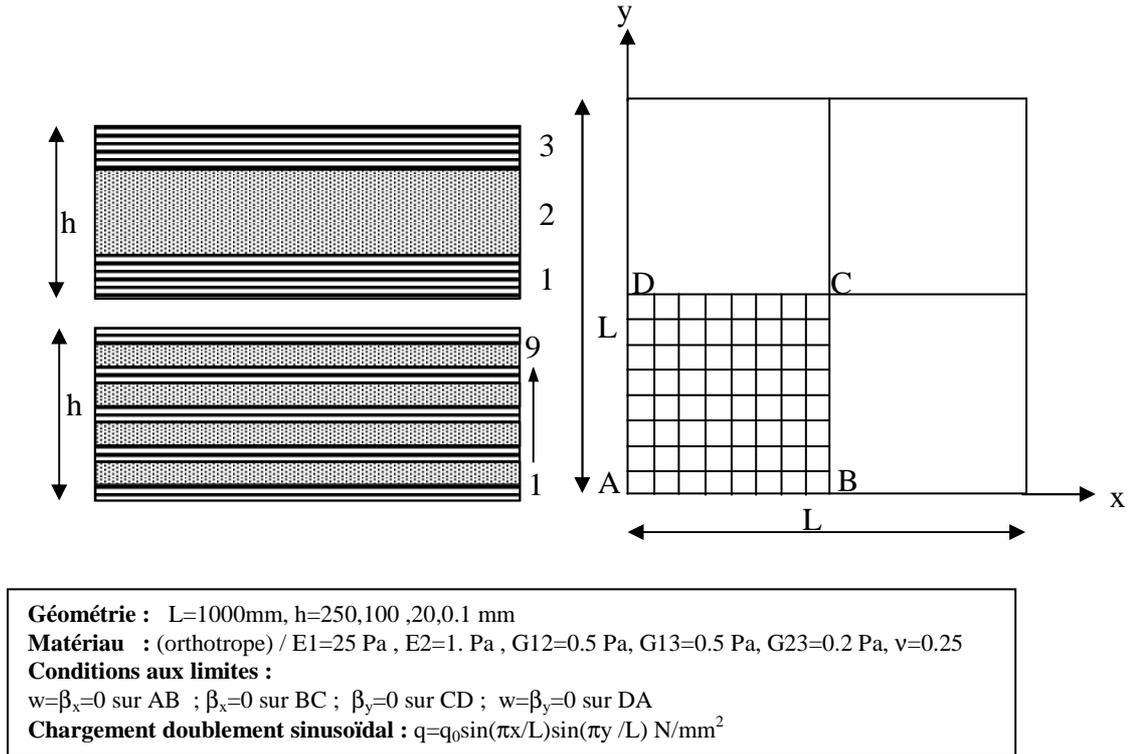
- 3 couches 0/90/0 (stratification 1)
- 9 couches 0/90/0/90/0/90/0/90/0 (stratification 2).

Dans les deux cas, les épaisseurs totales de couches à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  sont égales, et les couches de même orientation ont toutes la même épaisseur. Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la plaque est maillé. Nous avons effectué les calculs pour deux types de maillage :  $6 \times 6$  et  $10 \times 10$ .

Les solutions de référence sont données sous forme adimensionnelle. Il s'agit respectivement du déplacement transversal et des contraintes :

$$\bar{w} = \frac{\pi^4 w Q}{12 S^4 h q_0}, \quad Q = 4G_{12} + \frac{[E_1 + E_2(1 + 2\nu_{23})]}{(1 + \nu_{12}\nu_{21})}; \quad S = \frac{L}{h} \quad (3.4)$$

$$(\bar{\sigma}_{xx} \quad \bar{\sigma}_{yy}) = \frac{1}{q_0 S^2} (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy}), \quad (\bar{\sigma}_{xz} \quad \bar{\sigma}_{yz}) = \frac{1}{q_0 S} (\sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}) \quad (3.5)$$



**Figure.3.1.** Stratification d'une plaque composite à 3 et 9 couches

Analyses des résultats obtenus par notre élément MiSP4/ml :

Rappelons que notre modèle de plaque MiSP4/ml est sans facteurs  $k_i$  de correction de CT. Les résultats du déplacement transversal  $w$  au centre de plaque, comparés avec ceux obtenus par Lardeur (élément en déplacement DSQ avec facteurs de correction  $k_i$ ) [8] et par Batoz et Quesnel (élément en déplacement Q4γWT avec facteurs de correction  $k_i$ ) [83], sont en bon accord avec la solution tridimensionnelle de Pagano et Hatfield [56] jusqu'à  $L/h=10$  (voir tableaux 3.1, 3.2 et figure 3.2). Nous avons constaté, de la même façon que Pagano et Hatfield [56] dans leur étude 3D et Lardeur [8], que plus le nombre de couches est grand, moins la structure est sensible à l'effet de cisaillement transversal si l'épaisseur totale est constante.

L'estimation des contraintes planes, axiales  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  au point C pour  $L/h \geq 10$  dans le cas d'une stratification à 9 couches, converge plus vite que celles donnée par une stratification à 3 couches.

Dans le cas des contraintes de cisaillement transversal  $\sigma_{xz}$  au point D et  $\sigma_{yz}$  au point B, les résultats sont globalement satisfaisants. Ils le sont encore d'avantage pour un élancement  $L/h = 50$ .

Les Figures (3.3) et (3.4) montrent la distribution des contraintes à travers l'épaisseur pour  $L/h = 10$ . Une bonne corrélation avec les résultats exacts de Pagano [56] est en effet observée.

En conclusion, le modèle mixte-hybride de plaque multicouches MiSP4/ml donne globalement des résultats satisfaisants sur la flèche et sur les contraintes, en particulier lorsque le nombre de couches est assez grand. Nous avons d'autre part constaté que l'hypothèse de linéarité des contraintes dans chaque couche n'est plus acceptable. Le problème devient purement tridimensionnel. Cette conclusion a été également obtenue par Lardeur [8].

Nous remarquons, dans le cas d'une plaque épaisse à 3 couches (0/90/0), que les résultats des déplacements et des contraintes sont loins du ceux de pagano (voir erreur tableau :3.1 ). L'erreur diminue pour des élancements  $L/h > 10$ . Ceci, s'explique par une présence importante du CT dans les structures composites multicouches épaisses.

**A(0,0) ; B(L/2,0) ; C(L/2,L/2) ; D(0,L/2)**

L/h	Modèle	$\bar{\sigma}_{xc} \left( \frac{h}{2} \right)$	% erreur*	$\bar{\sigma}_{yc} \left( \frac{h}{4} \right)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{xzD}(\theta)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{yzB}(\theta)$	% erreur	$\bar{w}_C(\theta)$	% erreur
4	DSQ 6x6	0.369	48.75	0.662	0.151	0.245	11.872	0.331	-13.356	4.834	-7.637
	E ET O 6x6	0.387	46.25	0.618	6.787	0.256	-16.89	0.302	-3.425	5.195	-15.65
	MiSP4/ml 6x6	0.327	54.583	0.734	-10.708	0.230	-5.023	0.353	-20.89	4.847	-7.927
	MiSP4/ml 10x10	0.3375	53.125	0.738	-11.312	0.231	-5.479	0.353	-20.89	4,835	-7.659
	Elasticité	0.720		0.663		0.219		0.292		4.491	
10	DSQ 6x6	0.482	13.774	0.4	0.249	0.305	-1.329	0.204	-4.082	1.72	-0.643
	E et O 6x6	0.488	12.701	0.388	3.242	0.309	-2.658	0.195	0.510	1.771	-3.627
	MiSP4/ml 6x6	0.4755	14.937	0.425	-5.985	0.302	-0.332	0.208	-6.122	1.771	-3.627
	MiSP4/ml 10x10	0.474	15.205	0.4225	-5.361	0.304	-0.996	0.208	-6.122	1,768	-3.452
	Elasticité	0.559		0.401		0.301		0.196		1.709	
50	DSQ 6x6	0.536	0.556	0.276	0	0.332	1.483	0.139	1.418	1.025	0.582
	E ET O 6x6	0.54	-0.185	0.283	-2.536	0.336	0.296	0.14	0.709	1.034	-0.291
	MiSP4/ml 6x6	0.54	-0.185	0.278	-0.725	0.336	0.296	0.141	0	1.031	0
	MiSP4/ml 10x10	0.536	0.556	0.278	-0.725	0.336	0.296	0.141	0	1.031	0
	Elasticité	0.539		0.276		0.337		0.141		1.031	
10 <sup>4</sup>	DSQ 6x6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	E ET O 6x6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	MiSP4/ml 6x6	0.54	-0.185	0.27	-0.372	0.337	0.595	0,137	0.725	0.998	0.2
	MiSP4/ml 10x10	0.54	-0.185	0.27	-0.372	0.338	0.29	0,138	0	0.998	0.2
	Elasticité	0.539		0.269		0.339		0.138		1.000	

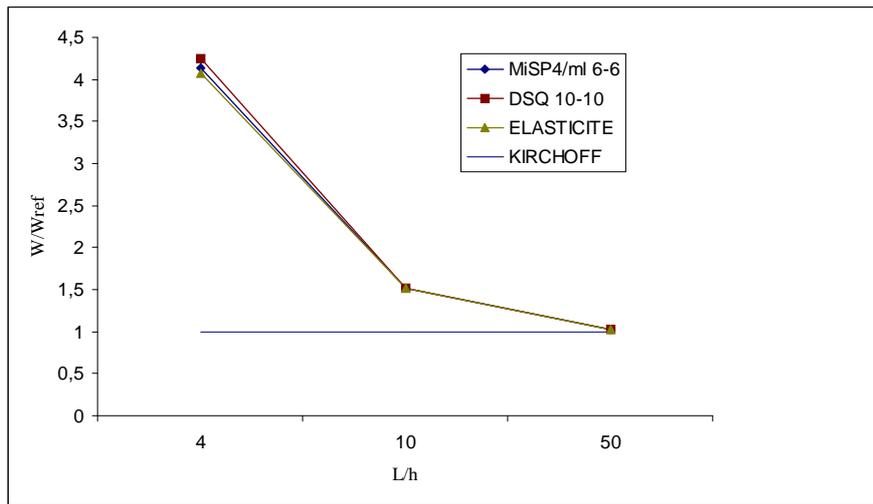
\* pourcentage d'erreur de Misp4/ml en comparant avec la solution de l'élasticité, avec un maillage 6x6

**Tableau 3.1.** Plaque carrée composite à 3 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Comparaison des déplacements et contraintes maximums.

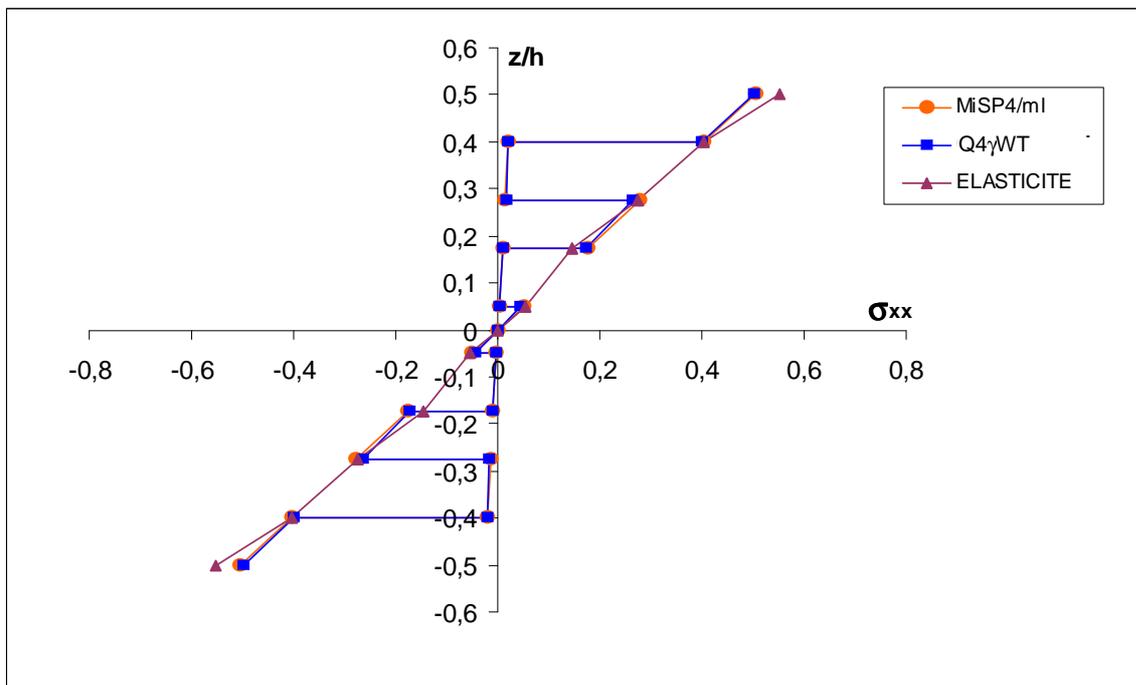
L/h	Modèle	$\bar{\sigma}_{xc} \left( \frac{h}{2} \right)$	% erreur*	$\bar{\sigma}_{yc} \left( \frac{h}{4} \right)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{xzD}(\theta)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{yzB}(\theta)$	% erreur	$w_c(\theta)$	% erreur
4	DSQ 6x6	0.491	28.216	0.487	22.452	0.235	-5.381	0.243	-8.968	4.235	-3.824
	MiSP4/ml 6x6	0.455	33.479	0.536	14.649	0.22	1.345	0.265	-18.834	4.133	1.323
	MiSP4/ml10x10	0.453	33.772	0.534	14.968	0.221	0.897	0.265	-18.834	4.121	-1.029
	Q4γ(6x6)	0.468	31.579	0.485	22.77	0.24	-7.623	0.239	-7.175	4.29	-5.173
	Q4γ(10x10)	0.472	30.994	0.506	19.426	0.241	-8.07175	0.240	-7.623	4.281	-4.952
	Elasticité	0.684		0.628		0.223		0.223		4.079	
10	DSQ 6x6	0.519	5.808	0.455	4.612	0.246	0.405	0.228	-0.885	1.516	-0.264
	MiSP4/ml 6x6	0.505	8.348	0.476	0.21	0.242	2.024	0.237	-4.867	1.512	0
	MiSP4/ml10x10	0.505	8.348	0.472	1.048	0.243	1.619	0.238	-5.31	1.510	0.132
	Q4γ(6x6)	0.506	8.167	0.458	3.983	0.257	-4.0486	0.220	2.655	1.529	-1.124
	Q4γ(10x10)	0.509	7.622	0.461	3.354	0.258	-4.453	0.220	2.655	1.530	-1.190
	Elasticité	0.551	-	0.477		0.247		0.226		1.512	
50	DSQ 6x6	0.538	0.185	0.432	0.231	0.253	1.938	0.216	1.37	1.015	0.587
	MiSP4/ml 6x6	0.54	-0.185	0.435	-0.462	0.256	0.775	0.218	0.456	1.019	0.196
	MiSP4/ml10x10	0.536	0.556	0.435	-0.462	0.258	0	0.220	-0.456	1.018	0.294
	Q4γ(6x6)	0.531	1.484	0.428	1.155	0.269	-4.263	0.206	5.936	1.016	0.49
	Q4γ(10x10)	0.535	0.742	0.431	0.462	0.270	-4.651	0.207	5.479	1.020	0.098
	Elasticité	0.539	-	0.433		0.258		0.219		1.021	
10 <sup>4</sup>	DSQ 6x6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	MiSP4/ml 6x6	0.54	-0.185	0.432	-0.232	0.257	0.772	0.217	0.913	0.998	0.2
	MiSP4/ml10x10	0.54	-0.185	0.432	-0.232	0.258	0.386	0.218	0.456	0.998	0.2
	Q4γ(6x6)	0.533	1.113	0.426	1.16	0.269	-3.861	0.205	6.393	0.995	0.5
	Q4γ(10x10)	0.537	0.371	0.429	0.464	0.270	-4.247	0.206	5.936	0.998	0.2
	Elasticité	0.539	-	0.431		0.259		0.219		1.000	

\* pourcentage d'erreur de Misp4/ml en comparant avec la solution de l'élasticité pour un maillage 6x6

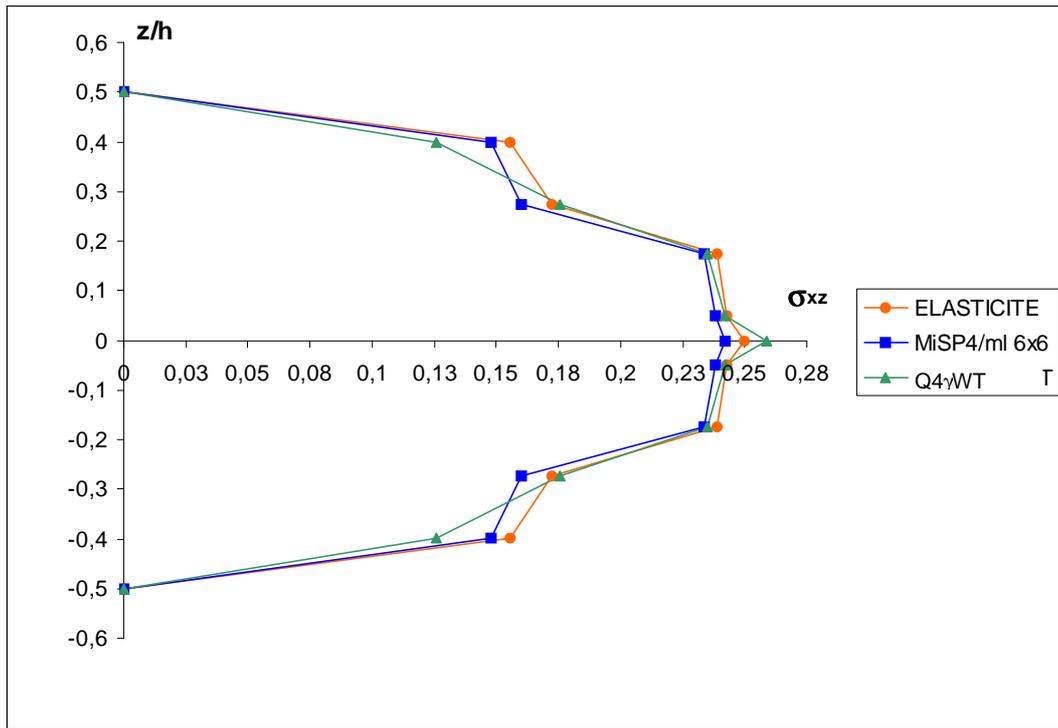
**Tableau .3.2.** Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal : comparaison des déplacements et contraintes maximums.



**Figure.3.2.** Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Influence de  $L/h$  sur  $w$  au centre



**Figure.3.3.** Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal- Distribution de  $\sigma_{xx}$  à travers l'épaisseur pour  $L/h=10$ .



**Figure.3.4.** Plaque carrée composite à 9 couches simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal- Distribution de  $\sigma_{xz}$  à travers l'épaisseur pour  $L/h=10$

### 3.2.2 Plaque rectangulaire composite à 3 couches simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal ( $b/a=3$ )[8] :

Les données du problème sont similaires à celles de l'exemple précédent, nous avons utilisé un maillage 6x6 pour une stratification 0/90/0 constituée de 3 couches laminées d'épaisseurs égales. Nous avons imposé la condition aux limites  $w=\beta_s=0$  aux bords de la plaque (l'indice s de  $\beta_s$  égale x ou y, il dépend de la direction de du bord). Pour des raisons de symétrie, nous avons modélisé uniquement le 1/4 de plaque.

Les expressions des déplacements et des contraintes au centre de la plaque sont données sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w} = \frac{100E_2}{q_0 h S^4} w \quad S = \frac{L}{h}, \quad (\bar{\sigma}_{xx} \quad \bar{\sigma}_{yy}) = \frac{1}{q_0 S^2} (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy}), \quad (\bar{\sigma}_{xz} \quad \bar{\sigma}_{yz}) = \frac{1}{q_0 S} (\sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}) \quad (3.7)$$

Le chargement auquel est soumise la plaque est sinusoïdal :

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (3.8)$$

Les résultats des déplacements et des contraintes sont donnés dans le tableau 3.5. Le déplacement maximum  $\bar{w}$  est en accord avec la solution exacte de Pagano [57] jusqu'à  $a/h=10$ , ainsi qu'avec les résultats d'Engblom et Ochoa [58]. Ces derniers proposent une formulation d'ordre supérieur en déplacement avec variation quadratique des déplacements  $u$  et  $v$  dans l'épaisseur. Pour les contraintes, notre modèle mixte-hybride MiSP4/ml fournit globalement de bons résultats pour des élancements  $a/h \geq 10$ .

Nous avons calculé les erreurs de l'élément MiSP4/ml en comparant avec l'élasticité dans le cas d'un maillage 6x6.

Pour les contraintes, notre modèle mixte-hybride MiSP4/ml fournit globalement de bons résultats pour des élancements  $L/h \geq 10$ .

L'évolution de l'erreur sur  $\sigma_{xx}$  est inversement proportionnelle à l'augmentation de la longueur (46.4 % si  $a=3b$  et 54 % si  $a=b$  pour  $L/h=4$  par exemple). Ceci est dû à l'influence de CT.

**A(0,0) ; B(a/2,0) ; C(a/2,b/2) ; D(0,b/2)**

L/h	Modèle	$\bar{\sigma}_{xc} \left( \frac{h}{2} \right)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{yc} \left( \frac{h}{b} \right)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{xzD}(\theta)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{yzB}(\theta)$	% erreur	$\bar{w}_c(\theta)$	% erreur
4	DSQ 6x6	0.587	48.509	0.124	-13.761	0.429	-22.222	0.048	-45.454	3.146	-11.560
	E ET O 6x6	0.612	46.315	0.126	-15.596	0.431	-22.792	0.039	-18.182	3.58	-26.95
	MiSP4/ml 6x6	0.611	46.403	0.131	-20.183	0.43	-22.507	0.038	-15.151	3.286	-16.525
	MiSP4/ml 10x10	0.61	46.491	0.131	-20.183	0.432	-23.077	0.038	-15.151	3.276	-16.170
	Elasticité	1.14		0.109		0.351		0.033		2.82	
10	DSQ 6x6	0.62	14.600	0.044	-4.762	0.433	0	0.016	-6.6666	0.928	-0.98
	E et O 6x6	0.625	13.912	0.042	0	0.436	-0.693	0.016	-6.6666	1.00	-8.814
	MiSP4/ml 6x6	0.624	14.05	0.045	-7.143	0.436	-0.693	0.0156	-4	0.954	-3.808
	MiSP4/ml 10x10	0.622	14.325	0.044	-4.762	0.438	-1.155	0.0156	-4	0.952	-3.591
	Elasticité	0.726		0.042		0.42		0.015		0.919	
50	DSQ 6x6	0.623	0.796	0.026	0	0.433	1.367	0.008	27.2727	0.518	0.385
	E ET O 6x6	0.54	14.013	0.024	7.692	0.436	0.683	0.011	0	0.524	-0.769
	MiSP4/ml 6x6	0.626	0.318	0.026	0	0.436	0.683	0.011	0	0.521	-0.192
	MiSP4/ml 10x10	0.625	0.478	0.026	0	0.438	0.228	0.011	0	0.521	-0.192
	Elasticité	0.628		0.026		0.439		0.011		0.52	
10 <sup>4</sup>	DSQ 6x6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	E ET O 6x6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	MiSP4/ml 6x6	0.626	-0.481	0.025	0	0.437	0.682	0.011	0	0.503	0
	MiSP4/ml 10x10	0.624	-0.161	0.025	0	0.438	0.454	0.011	0	0.503	0
	Elasticité	0.623		0.025		0.44		0.011		0.503	

**Tableau 3. 3.** Plaque rectangulaire composite à 3 couches simplement supportées sous chargement doublement sinusoïdal- comparaison des déplacements et contraintes maximums

### 3.2.3 Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme [8]

Les données physiques du problème sont définies sur la figure 3.5. Une solution analytique tridimensionnelle est proposée par Srivivas [59]. Owen et Figuerias [60] l'ont traité un élément fini quadrilatéral (heterosis à 9 nœuds).

Les propriétés mécaniques du matériau constituant le cœur sont proportionnelles à celles des peaux. Le coefficient  $c$  détermine le rapport de proportionnalité. Il prend successivement les valeurs 1,10,50 :

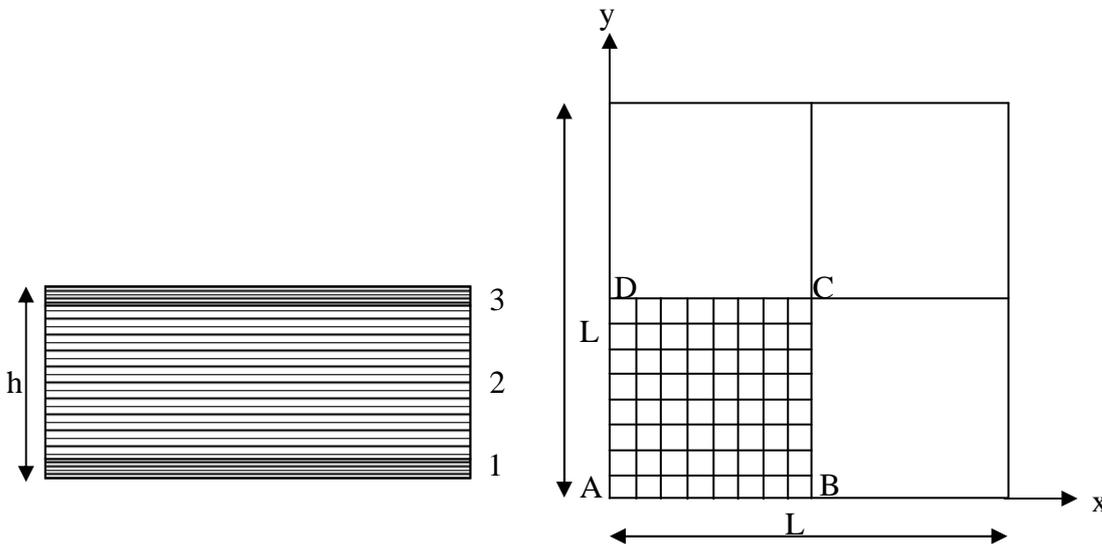
- $c=1$  correspond à une plaque orthotrope
- $c=50$  correspond à une structure moyennement sandwich.

L'analyse est faite pour un seul rapport  $L/h=10$ . Un maillage 6x6 a été utilisé pour modéliser le quart de la plaque compte tenue de la symétrie du problème.

Les expressions adimensionnelles du déplacement transversal et des contraintes  $\bar{\sigma}_{xx}$  au centre de la plaque sont données par :

$$\bar{w} = \frac{wG_{12}(2)}{hq_0}, \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{q_0} \quad (3.9)$$

Les résultats correspondants sont reportés sur le tableau 3.4.



**Géométrie :**  $L=1000, h=100$  mm ( $e_1=e_2= 10$   $e_2=80$ )  
**Matériau :** (orthotrope) sur les peaux  $E_1=3.4156$  Pa,  $E_2=1.7931$  Pa,  $G_{12}=1$ Pa,  $G_{13}=0.608$  Pa,  $G_{23}=1.015$  Pa,  $\nu=0.44$   
**Conditions aux limites :**  $w=\beta_x=0$  sur AB ;  $\beta_x=0$  sur BC ;  $\beta_y=0$  sur CD ;  $w=\beta_y=0$  sur DA  
**Stratification :** 3 couches symétriques 0/0/0  
**Rapport de proportionnalité :**  $c=1,10,50$

**Figure.3.5.** Plaque carrée sandwich simplement supportée sous charge uniforme- données du problème

Nos résultats sont globalement très proches de ceux de la solution exacte proposée par Owen et Figueiras. La flèche  $\bar{w}$  s'éloigne un peu de la valeur exacte dans le cas de  $c=50$ . On note que la différence entre les résultats peut être expliquée facilement en observant les figures 3.6-3.7. qui montrent respectivement la distribution suivant l'axe  $z$  de  $\bar{\sigma}_{xx}$  et de  $\bar{\sigma}_{xz}$ .

On constate que c'est l'hypothèse d'un gauchissement constant sur toute la surface qui induit une erreur sur le calcul.

**Remarque :** Explication de la différence importante entre la solution numérique de notre modèle et les résultats de l'élasticité 3D

En effet, dans le repère global, le champ de déplacements est défini par:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + zu_1 + u_g \\ v &= v_0 + zv_1 + v_g \\ w &= cte \end{aligned} \quad (3.10)$$

$u_g$  et  $v_g$  sont les déplacements de gauchissement en  $z$ .

Dans le cas où  $c=50$ , si  $u_g$  et  $v_g$  ne sont pas pris en compte ; nous aboutirons à une mauvaise estimation de la matrice de rigidité globale  $[k_g]$ . Ainsi le calcul de  $\{u_n\}$  (vecteur des déplacements aux nœuds) par l'équation :  $([K_g] \{u_n\} = \{f_{ext}\})$  n'est pas précis en comparant sa valeur à celle de la solution de Pagano.

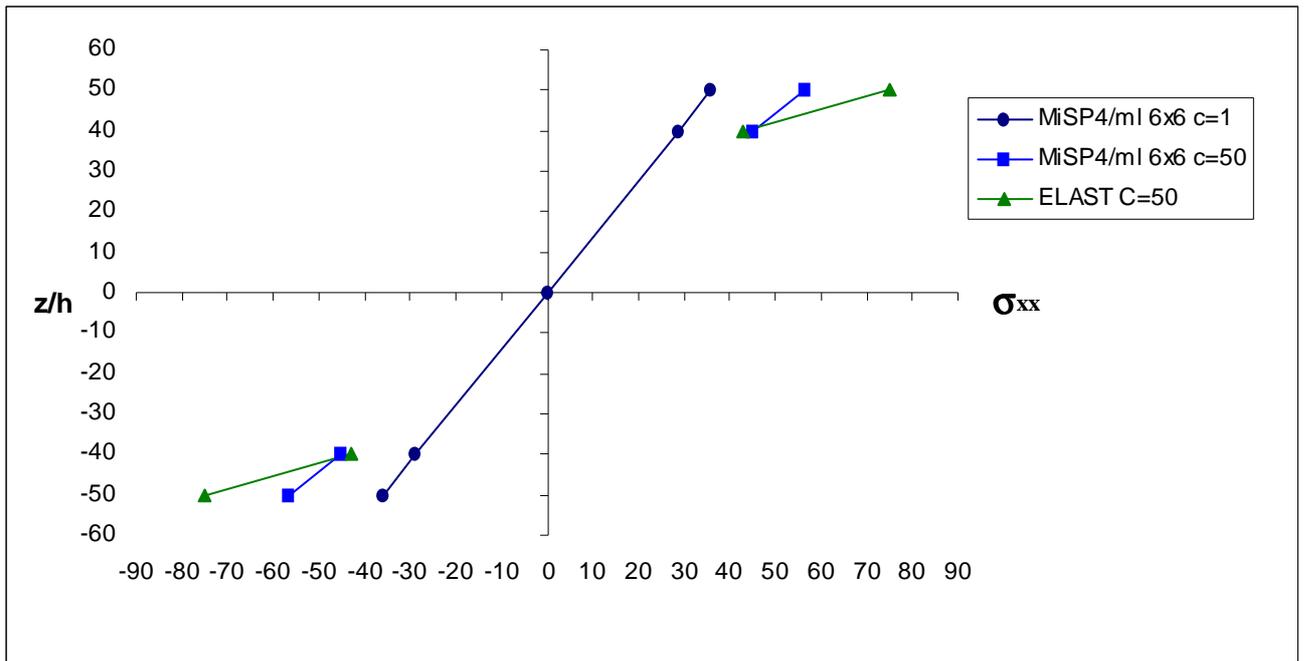
En résumé, la prise en compte des termes  $u_g$  et  $v_g$  dans le calcul de la rigidité global fera nécessairement diminuer les déplacements, en raison de l'existence d'une variation d'énergie liée à la présence de ces deux déplacements.

De la même façon, nous pourrions expliquer la différence dans les résultats des contraintes, sachant que la formulation des contraintes dépend du vecteur des déplacements aux nœuds  $\{u_n\}$ .

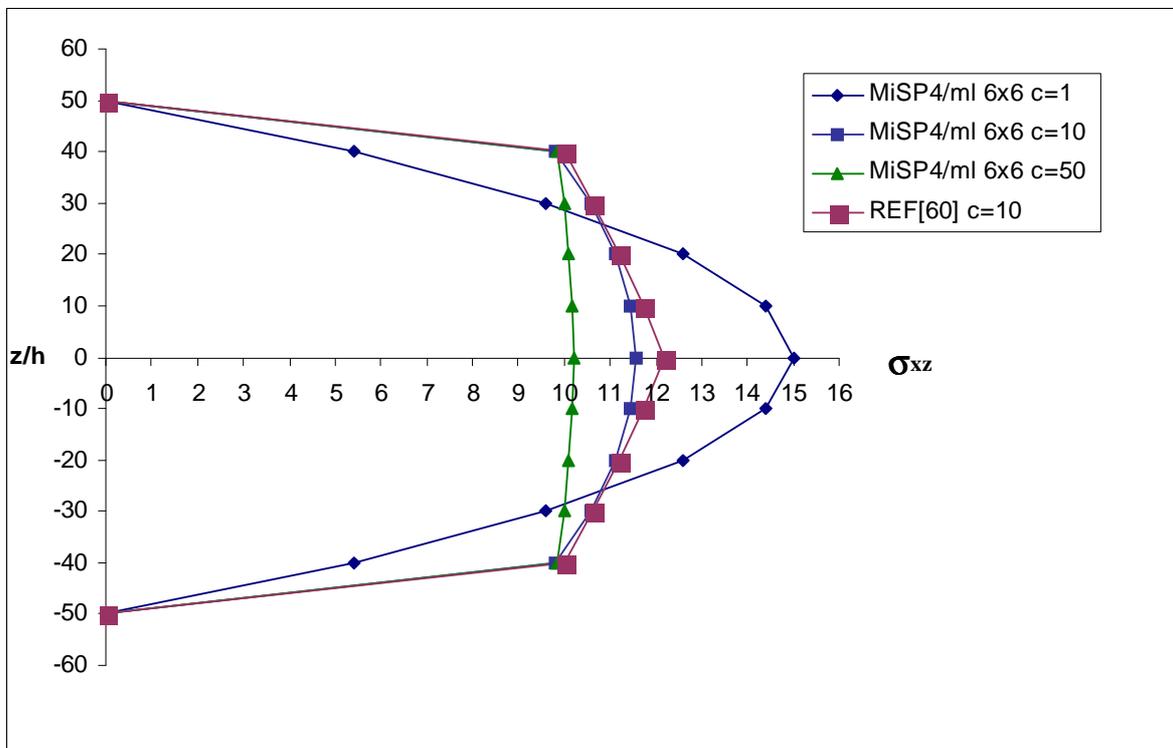
#### C(L/2,L/2)

C	Modèle	$\bar{\sigma}_{xc} \left( -\frac{2h-}{5} \right)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{xc} \left( -\frac{2h+}{5} \right)$	% erreur	$\bar{\sigma}_{xc} \left( -\frac{h}{2} \right)$	% erreur	$w \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0 \right)$	% erreur
C=1	DSQ 6x6	28.73	-0.665	28.73	-0.665	35.91	0.0834	181.42	-0.204
	Heterosis 6x6	28.98	-1.541	28.98	-1.542	36.22	-0.779	183.99	-1.624
	MiSP4/ml 6x6	28.8	-0.911	28.8	-0.911	36	-0.167	182	-0.525
	Elasticité	28.54		28.54		35.94		181.05	
C=10	DSQ 6x6	5.09	-4.732	50.88	-4.670	63.60	2.274	42.04	-0.310
	E et O 6x6	4.87	-0.206	48.73	-0.247	65.23	-0.230	41.92	-0.024
	MiSP4/ml 6x6	5.04	-3.704	50.4	-3.682	63.0	3.196	43.845	-4.617
	Elasticité	4.86		48.61		65.08		41.91	
C=50	DSQ 6x6	0.93	-25.675	46.69	-25.679	58.37	22.961	16.89	-0.836
	E ET O 6x6	0.93	-25.675	46.65	-25.572	58.31	23.122	16.85	-0.597
	MiSP4/ml 6x6	0.905	-22.297	45.1	-21.4	56.4	28.264	18.8	-12.24
	Elasticité	0.74		37.15		66.90		16.75	

**Tableau 3.4.** Plaque carrée Sandwich simplement supporté sous charge uniforme. Comparaison des déplacements et contraintes  $\bar{\sigma}_{xx}$  maximums.



**Figure.3.6.** Plaque carrée sandwich simplement supportée sous charge uniforme-  
Distribution de  $\sigma_{xx}$  à travers l'épaisseur ( $L/h=10$ )



**Figure.3.7.** Plaque carrée sandwich simplement supportée sous charge uniforme-  
Distribution de  $\sigma_{xz}$  au centre C( $L/2, L/2$ ) à travers l'épaisseur ( $L/h=10$ )

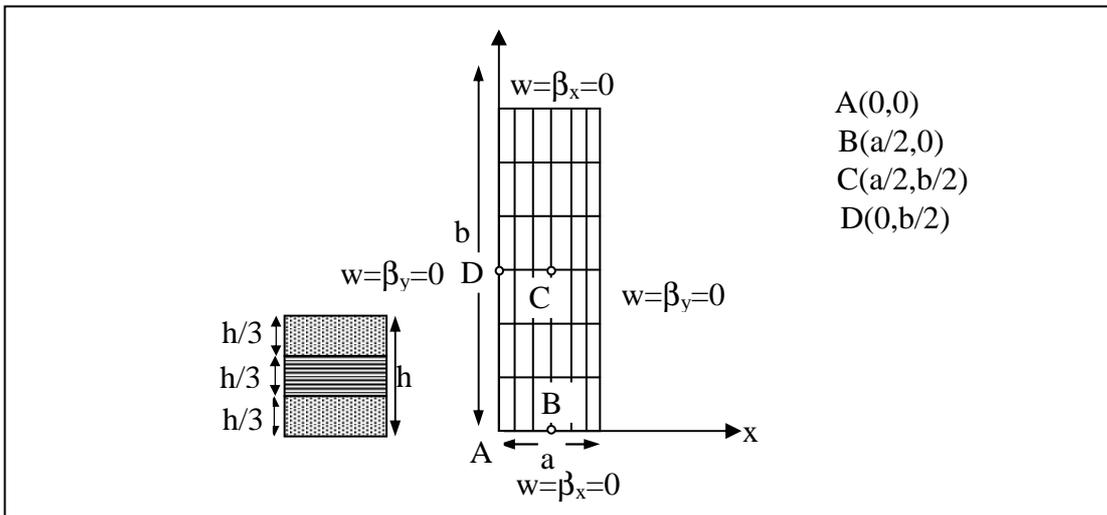
### 3.2.4 Confrontation de l'élément MiSP4/ml à un modèle basé sur une théorie d'ordre supérieur

Le modèle utilisé pour la comparaison est basé sur une théorie d'ordre supérieur connue sous le nom RHSDT (Refined high Order Shear Deformation Theory) [6] que nous avons résumé dans la synthèse bibliographique du chapitre 1. Il utilise une fonction cubique pour approcher les déplacements selon l'épaisseur. L'élément fini considéré possède 4 nœuds et 7 ddl par nœud :  $u, v, w, \beta_x, \beta_y, \phi_x, \phi_y$ , ( $\phi_x, \phi_y$  sont des angles de gauchissement). Les continuités aux interfaces sont ainsi satisfaites. Il permet d'obtenir une distribution nonlinéaire du champ de déformation de CT dans la couche et une continuité  $C^1$  des contraintes de CT. L'élément ainsi proposé est appliqué aux plaques Sandwich avec des performances très satisfaisantes.

#### 3.2.4.1. Etude d'une stratification à 3 couches

Il s'agit d'une plaque rectangulaire stratifiée (3 couches 90/0/90) simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal (Figure 3.8). Trois élancements différents ont été considérés :  $a/h=4, 10$  et  $100$ . Les résultats de notre modèle MiSP4/ml comparés au modèle RHSDT concernent le déplacement transversal  $w$ , les trois contraintes planes calculés au centre de la plaque, et les contraintes de CT calculées aux points  $(0, b/2, 0)$  et  $(a/2, 0, 0)$  (voir tableau 3.5). Les expressions analytiques correspondantes, obtenues par Pagano [57], sont définies par :

$$\bar{w} = \frac{w_c(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0) 100 E_2 h^3}{q_0 a^4}; \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}) h^2}{q_0 a^2}; \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{6}) h^2}{q_0 a^2}; \bar{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}(0, \frac{b}{2}, 0) h}{q_0 a}; \bar{\tau}_{yz} = \frac{\tau_{yz}(\frac{a}{2}, 0, 0) h}{q_0 a}$$



**Figure 3.8.** Plaque rectangulaire stratifiée (3 couches 90/0/90) simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Données

Données matériaux :  $E_x=25 \text{ Pa}$ ,  $E_y=1 \text{ Pa}$ ,  $\nu_{12}=0.25$ ,  $G_{xy}=0.5 \text{ Pa}$ ,  $G_{xz}=0.5 \text{ Pa}$ ,  $G_{yz}=0.2 \text{ Pa}$

ELEMENT (Maillage utilisé:6x6)	a/h	$\bar{\sigma}_{xC}$	% erreur	$\bar{\sigma}_{yC}$	% erreur	$\bar{\tau}_{xzD}$	% erreur	$\bar{\tau}_{yzB}$	% erreur	$\bar{w}_C$	% erreur
MiSP4/ml	4	0.587	46.604	0.127	-6.722	0.413	-3.509	0.0365	-9.281	3.330	-18.0851
RHSDT		1.153	-4.818	0.111	6.722	0.393	1.504	0.0296	11.377	2.780	1.418439
Pagano [57]		1.100		0.119		0.399		0.0334		2.820	
MiSP4/ml	10	0.599	17.379	0.043	0	0.428	-1.905	0.0149	1.973	0.960	-4.46137
RHSDT		0.735	-1.379	0.043	0	0.455	-8.333	0.0149	1.973	0.920	-0.10881
Pagano [57]		0.725		0.043		0.420		0.0152		0.919	
MiSP4/ml	100	0.602	3.525	0.024	4	0.417	5.011	0.0102	5.555	0.508	0
RHSDT		0.638	-2.243	0.026	-4	0.470	-7.061	0.0110	-1.852	0.508	0
Pagano [57]		0.624		0.025		0.439		0.0108		0.508	

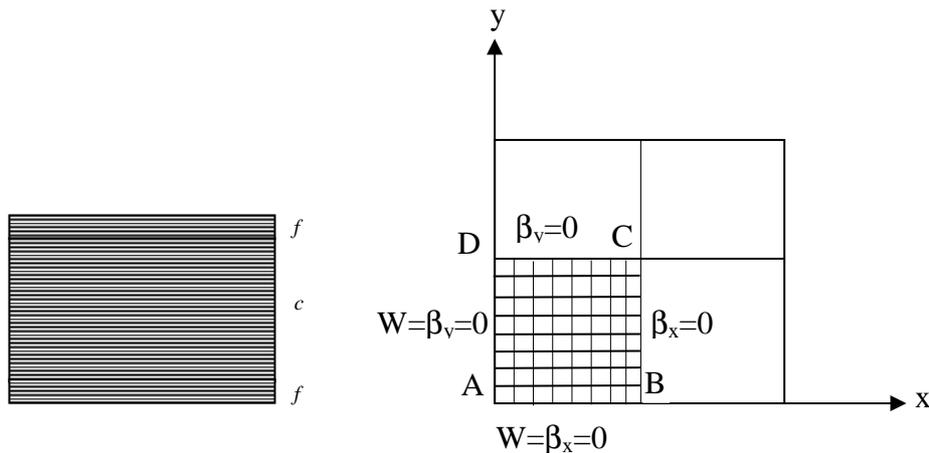
**Tableau 3.5.** Plaque rectangulaire stratifiée (3 couches 90/0/90) simplement supportée sous chargement doublement sinusoïdal. Résultats du déplacement transversal et des contraintes

Remarque : Dans l'exemple traité, nous avons constaté dans notre cas que la stratification à 3 couches 90/0/90°, (les couches ayant une même épaisseur) est plus rigide que celle à 0/90/0°. Pour des petits élancements ( $L/h \leq 10$ ), l'erreur sur la flèche correspondant à la stratification 90/0/90° est plus grande que celle de la stratification 0/90/0° (section 2.2), car les couches inférieures et supérieures sont moins rigides que la couche du cœur, cela fait augmenter l'effet de gauchissement.

Par contre l'erreur sur les contraintes devient plus petite dans le cas de la stratification 90/0/90° à cause de la diminution des effets de CT. Celui-ci diminue par le fait que la présence d'une couche en cœur (orientation 0°) rend le matériau plus rigide.

### 3.2.4.2. Etude d'une plaque carrée sandwich

Il s'agit d'une plaque carrée sandwich ( $b/a=1$ ,  $a=0.254 \text{ m}$ ) (face/cœur/face) simplement supportée soumise à une charge uniformément répartie  $q=6.895 \text{ kPa}$  (Figure 3.9). Elle est modélisée avec un maillage 8x8. L'épaisseur totale de la plaque  $h=20.4724 \text{ mm}$ , celle de la face inférieure ou supérieure est égale à  $0.7112 \text{ mm}$ .



**Figure 3.9.** Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Données

Deux types de matériaux ont été étudiés :

Matériau 1 :

- Face (isotrope) :  $E=68.95\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$
- Cœur orthotrope :  $E_x=E_y=6.89510^{-10}\text{MPa}$ ,  $\nu_{xy}=0.3$ ,  $G_{xz}=G_{yz}=206.85\text{MPa}$

**Matériau 2 :**

- Face (isotrope) :  $E_x=68.95\text{GPa}$ ,  $E_y=27.58\text{GPa}$ ,  $\nu_{xy}=0.3$ ,  $G_{xy}=12.928125\text{GPa}$ ,  $G_{xz}=G_{yz}=10000G_{xy}$
- Cœur orthotrope:  $E_x=E_y=6.89510^{-10}\text{Mpa}$ ,  $\nu_{xy}=0.3$ ,  $G_{xz}=206.85\text{MPa}$ ,  $G_{yz}=82.74\text{MPa}$

Les résultats de notre modèle MiSP4/ml confrontés à ceux du modèle RHSDT concernant la flèche  $w_c$  et la résultante  $M_c$  des moments  $M_x, M_y, M_{xy}$  calculées au centre de la plaque (voir tableau 3.6). Elles sont comparées aux solutions de référence obtenues respectivement par Planterma [61] pour le matériau 1 et Azar [62] pour le matériau 2. Nos résultats sont en très bon accord avec les solutions analytiques au même titre que ceux obtenus par le modèle d'ordre supérieur RHSDT.

Matériau	Élément	$W_c(\text{cm})10^4$	% erreur	$M_c(\text{Nm/m})$	% erreur
Matériau 1	Misp4/ml 8x8	20.5	-9.141	21.695	-1.821
	RHSDT 8x8	18.791	-0.0426	21.297	0.0469
	Solution analytique	18.783		21.307	
Matériau 2	Misp4/ml 8x8	33.5	-7.578	34.07	
	RHSDT 8x8	31.013	0.408	33.419	
	Solution analytique <sup>a,b</sup>	31.140			

\*  $M_c$  est le moment résultant des 3 moments  $M_x, M_y, M_{xy}$ :  $M_c = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{xy}^2}$

<sup>a</sup> Planterma [61]; <sup>b</sup> Azar [62]

**Tableau 3.6.** Plaque carrée sandwich simplement supportée sous chargement uniforme. Résultats de la flèche et du moment résultant au centre de la plaque

### 3.3. Tests de vibrations libres

#### 3.3.1. Plaque carrée isotrope simplement supportée [8]

Nous avons étudié pour une plaque carrée isotrope (longueur  $L$  et épaisseur  $h$ ) l'influence du cisaillement transversal sur les fréquences de vibrations libres pour une épaisseur fixe. A l'aide d'un maillage  $6 \times 6$ , nous avons étudié la variation de valeur propre  $\lambda$  par rapport au mode de vibration, ensuite la fréquence fondamentale  $\omega_f$  en faisant varier le rapport  $L/h$ . La condition aux limites de plaque simplement supportée imposée sur le contour est  $w = \beta_s = 0$ .

Pour  $L/h=10$ , nous avons d'abord analysé les quatre premières fréquences propres. Les résultats sont reportés dans le tableau 3.7 (m et n représentent le nombre d'ondes suivant x et y respectivement) :

M	n	$\lambda$	Elasticité [63]	Mindlin[64]	DSQ (6x6)	MiSP4/ml (6x6)	% erreur	CPT*
1	1	0.093	5.78	5.77	5.8	5.786	0.104	5.97
1	3	2.01	25.87	25.7	26.85	26.9	3.981	29.87
3	3	5.4	42.72	42.3	44.4	44.1	3.230	53.87
1	5	11.38	57.48	56.76	63.48	64	11.343	77.65

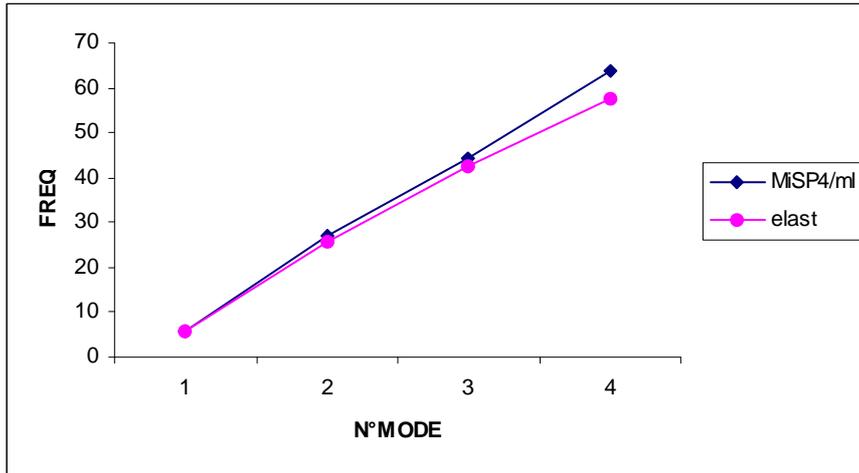
\* CPT résultat selon la théorie de Kirchoff

**Tableau 3.7.** Plaque carrée isotrope simplement supportée ( $L/h=10$ )

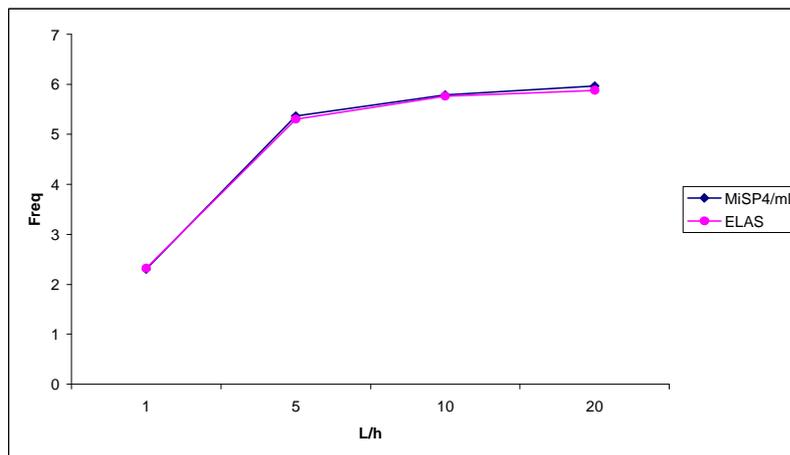
- Comparaisons des 4 premières fréquences propres  $\omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{Eh^2}}$

L/h	Elasticité [63]	Mindlin[64]	DSQ 6x6	MiSP4/ml (6x6)	erreur %	CPT
20	5.88	5.94	5.96	5.964	-1.428	5.97
10	5.76	5.77	5.8	5.786	-0.451	
5	5.30	5.27	5.3	5.365	-1.226	
1	2.32	2.25	2.27	2.302	0.776	

**Tableau 3.8.** Plaque carrée isotrope simplement supportée - Influence de L/h sur la fréquence fondamentale  $\varpi = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho}{Eh^2}}$



**Figure 3.10.** Plaque carrée isotrope simplement supportée en vibration libres - Influence du C.T. sur la fréquence propre fondamentale en fonction du numéro de mode (L/h=10)



**Figure.3.11.** Plaque carrée isotrope simplement supportée en vibrations libres

Les investigations ont conduit aux conclusions suivantes :

- Nos résultats sont en bon accord avec les solutions de référence tridimensionnelles (Levinson [63] et de plaque épaisse (Reddy [64] ).

- le cisaillement transversal a pour effet d'assouplir la structure et par conséquent, de baisser les fréquences propres
- Quel que soit le rapport L/h , l'utilisation des maillages plus fins est nécessaire pour le calcul des modes supérieurs
- Plus le mode est élevé, plus l'influence du cisaillement transversal est grande (3 % pour le premier mode et 17 .57 % pour le quatrième mode – voir fig.3.10)

Nous avons étudié la fréquence fondamentale  $\omega_f$  en faisant varier L/h. Les résultats sont reportés dans le tableau 3.8 et illustrés sur la figure 3.11. Nous avons constaté que l'élément MiSP4/ml donne de bons résultats dans tous les cas. On notera que pour L/h=1 (la structure est alors un cube), nous obtenons une fréquence propre avec moins de 3 % d'erreur par rapport à la solution de l'élasticité tridimensionnelle, alors que la solution de Kirchoff donne une fréquence propre 2.5 fois trop élevée.

### 3.3.2. Vibrations libres d'une plaque carrée sandwich simplement supportée

La structure a déjà été étudiée en (3.2.3) dans le cas statique (voir figure 3.5). Deux types de matériaux sont utilisés : isotrope ( $\nu=0.3$ ) et orthotrope (voir fig.3.5). L'analyse est faite pour un seul rapport L/h=10. Pour des raisons de symétrie, seul un quart de plaque est modélisé par un maillage 6x6. Les résultats des fréquences propres fondamentales de vibration, comparés à ceux obtenus par DSQ [8], sont reportés dans le tableau 3.9. Dans tous les cas, nos résultats sont en accord avec les solutions de référence de l'élasticité 3D données par Srinivas [59]. L'effet du cisaillement transversal est plus important quand le matériau est orthotrope .

	Elasticité [59]	DSQ	MiSP4/ml	% erreur
Isotrope	c=1 : 0.0931	0.0936	0.09354	-0.470
	c=10: 0.1986	0.200	0.1962	1.223
	c=50: 0.3275	0.3283	0.3123	4.867
Orthotrope	c=1 : 0.0925	0.093	0.09294	-0.473
	c=10 : 0.1925	0.1922	0.1881	2.339
	c=50 : 0.2995	0.3	0.284	5.458

**Tableau 3.9.** Plaque carrée sandwich simplement supporté L/h=10

Comparaison des fréquences propres fondamentales  $\bar{\omega}_f = \omega \sqrt{\frac{\rho(2)h^2}{G_{12}(2)}}$

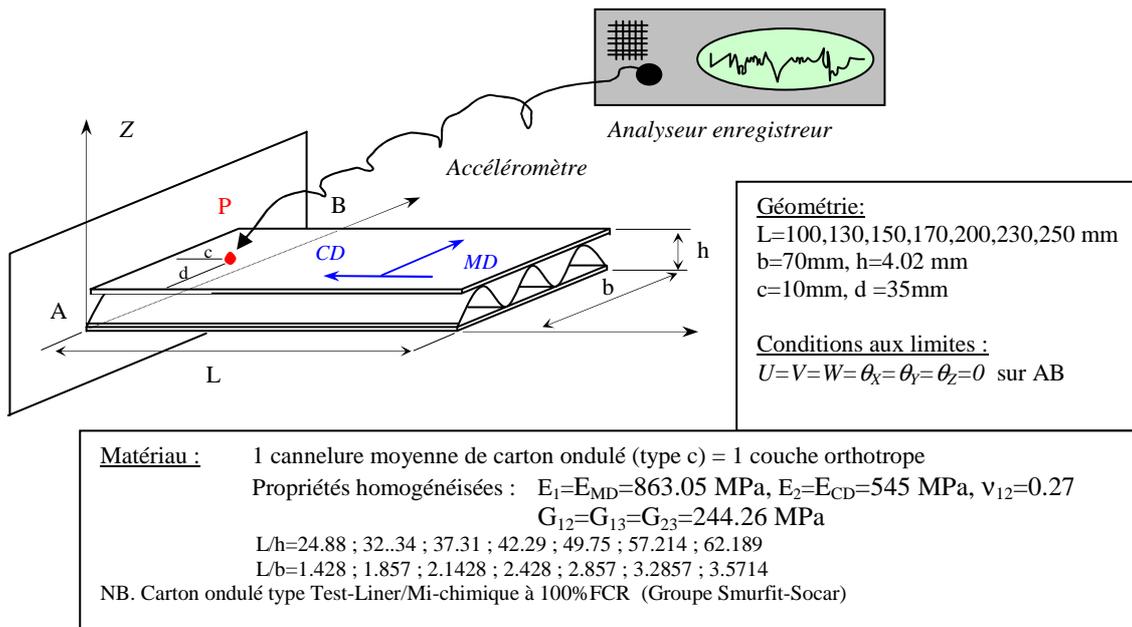
(c est le facteur de proportionnalité : figure 3.7)

Remarque : les erreurs calculées par la comparaison entre MiSP4/ml et la solution référence montrent que l'influence de gauchissement augmente avec c, ce gauchissement devient plus grand dans le cas d'orthotrope puisque le matériau devient moins rigide.

### 3.3.3. Application aux vibrations libres d'une plaque en carton ondulé

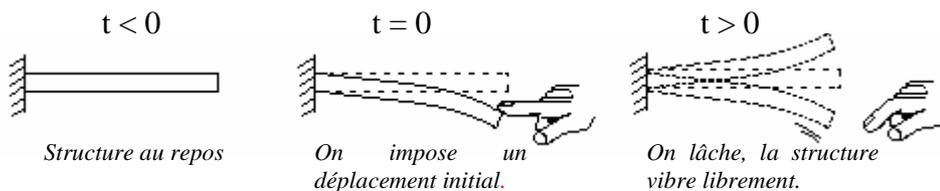
#### 3.3.3.1 Description de l'essai

Un test de vibrations libres d'une plaque rectangulaire en carton ondulé a été réalisé en 2002 en partenariat avec le CERME (Centre d'Etude et de Recherche en Matériaux et Emballages, ESIEC). Des échantillons de plaques ont été découpés sur des caisses en carton ondulé fournies par le Groupe Smurfit-Socar (Leader mondial du carton). La structure possède une seule couche (cannelure moyenne) d'épaisseur  $h=4.02\text{mm}$ , elle est encastrée à une extrémité, l'autre étant libre (figure 3.12). Un analyseur numérique doté d'un accéléromètre fixé sur la structure au point P, nous permet d'enregistrer l'accélération en ce point en fonction du temps, après avoir effectué un essai de lâché (figure 3.13). Le test est réalisé pour différentes valeurs de la longueur ( $L=100,130,150,170,200,230,250\text{ mm}$ ).



**Figure 3.12.** Plaque rectangulaire (carton ondulé) encastrée en vibration libre.

Données géométriques et matérielles.

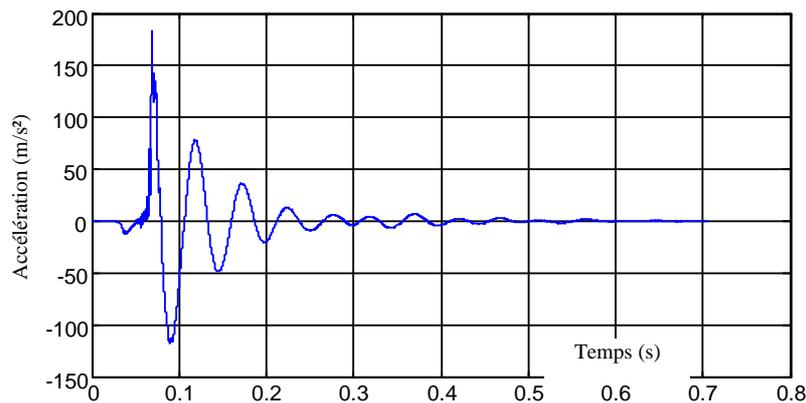


**Figure 3.13.** L'essai du lâché

La technique d'homogénéisation, proposée par Aboura [65] et adaptée au carton ondulé [66,67], nous a permis d'obtenir les propriétés mécaniques homogénéisées de la structure globale (figure 3.12) à partir de celles mesurées sur les peaux et l'ondulation.

### 3.3.3.2. Détermination des fréquences propres expérimentales

Le signal enregistré par l'analyseur numérique correspond à l'accélération du point P (figure 3.12). La fréquence propre est calculée à partir de la transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier Transform) appliquée à ce signal. Sur les figures 3.14 et 3.15 sont présentés respectivement le signal "accélération du point P" et sa transformée de Fourier, pour une plaque de longueur  $L = 200$  mm. La distribution temporelle de l'accélération montre qu'au-delà de 0.5 secondes, la structure est quasiment au repos. L'effet de l'amortissement du carton ondulé est très important : une caractéristique recherchée pour un matériau d'emballage.



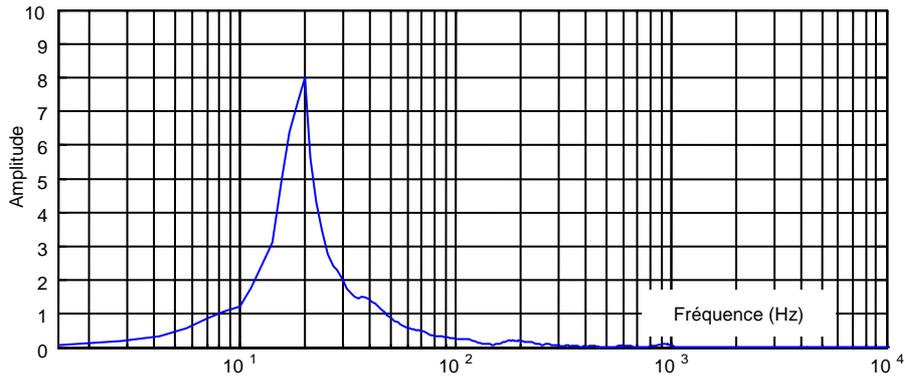
**Figure 3.14.** Accélération du point P. Plaque de longueur  $L = 200$  mm

Le spectre de Fourier nous fournit la fréquence de l'accélération au point P, qui correspond à la première fréquence propre de la structure (figure 3.15). Le graphe affiche une valeur de 19.46 Hz.

Les pulsations propres expérimentales en fonction de la longueur de la plaque sont résumées dans le tableau suivant :

Longueur de la plaque (mm)	100	130	150	170	200	230	250
Pulsation propre du premier mode ( $\text{rad.s}^{-1}$ )	354.13	236.07	182.75	155.99	122.27	96.96	75.86

**Tableau 3.10.** Vibrations libres d'une plaque en carton ondulé. Pulsations propres expérimentales en fonction de la longueur de la plaque.



**Figure 3.15.** FFT de l'accélération du point P. Plaque de longueur  $L = 200$  mm

### 3.3.3.3 Validation numérique

Dans le tableau 3.11, nous présentons les résultats numériques des fréquences propres obtenues avec notre modèle mixte-hybride sans facteurs de corrections de CT MiSP4/ml, l'élément DMTS (Discrete Mindlin Triangle for Shells, 3 nœuds et 6 ddl/nœud), développé par Ayad et al [68]. Ils sont comparés aux résultats expérimentaux. Un maillage 12x2 a été utilisé pour la modélisation.

Longueur de la plaque (mm)	L/h	Pulsation propre du 1 <sup>er</sup> mode (rad.s <sup>-1</sup> )			
		Expérience	MiSP4/ml	% erreur	DMTS
100	24.9	354.13	452.799	-27.862	443.04
130	32.3	236.06	268,131	-13.586	261.96
150	37.3	182.74	201.453	-10.240	196.63
170	42.3	155.99	156,871	-0.565	152.98
200	49.8	122.27	113.361	7.286	110.77
230	57.2	96.91	85,7278	11.539	83.43
250	62.2	75.86	72.5644	4.344	70.58

**Tableau 3.11.** Résultat numérique des pulsations propres. Comparaison avec l'expérience

Nous obtenons globalement une bonne corrélation entre les fréquences calculées et les fréquences expérimentales. Ces résultats encourageants nous confortent dans l'idée de considérer une structure en carton ondulé comme un matériau orthotrope, avec des propriétés élastiques pouvant être estimées par une technique d'homogénéisation, à partir des propriétés mesurées sur les peaux et l'ondulation.

Nous avons calculé les erreurs dans le résultat provenant de la comparaison entre l'élément MiSP4/ml et l'expérience. Nous avons constaté que l'erreur sera grande si la longueur est petite puisque l'influence de CT augmente, cela est dû à la fait que plus la longueur diminue plus le frottement entre les couches diminue.

## Chapitre 4

### FORMULATION ISOPARAMETRIQUE COURBE DU MODELE MIXTE-HYBRIDE DE COQUES COMPOSITES MULTICOUCHES

#### 4.1. Introduction et généralités

Ce chapitre est consacré à la modélisation des coques de forme arbitraire discrétisées par éléments finis. Nous commençons par développer les aspects géométriques, cinématiques et mécaniques d'une coque de forme quelconque. Nous passons ensuite à la formulation d'éléments finis à 4 nœuds isoparamétriques courbes avec CT pour les structures en coques composites multicouches. Ces éléments sont basés sur un modèle variationnel mixte-hybride naturel projeté en cisaillement. Il s'agit du modèle NHMiSP (Natural Hybrid-Mixed with Shear Projection) proposé par Ayad [68] pour les coques homogènes isotropes. Nous l'avons adapté aux coques composites multicouches dans le cadre de cette étude, sans recourir aux facteurs de correction du CT. Deux éléments finis de coques à 4 nœuds et 6 ddls par nœud (3 déplacements  $U_i, V_i, W_i$  selon les axes  $X, Y, Z$  du repère global et 3 rotations  $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  autour des trois axes) ont été formulés sur la base de ce modèle (ml : multicouches) :

- L'élément NHMiSP4/ml pour lequel la partie « membrane » est hybride naturelle. La partie flexion et CT reste mixte-hybride au sens de Helliger-Reissner.
- L'élément HMiSP4/Q4/ml pour lequel la partie membrane est formulée en déplacement. La partie flexion et CT reste mixte-hybride au sens de Helliger-Reissner.

Les deux modèles seront développés en détail dans la section 4.6.

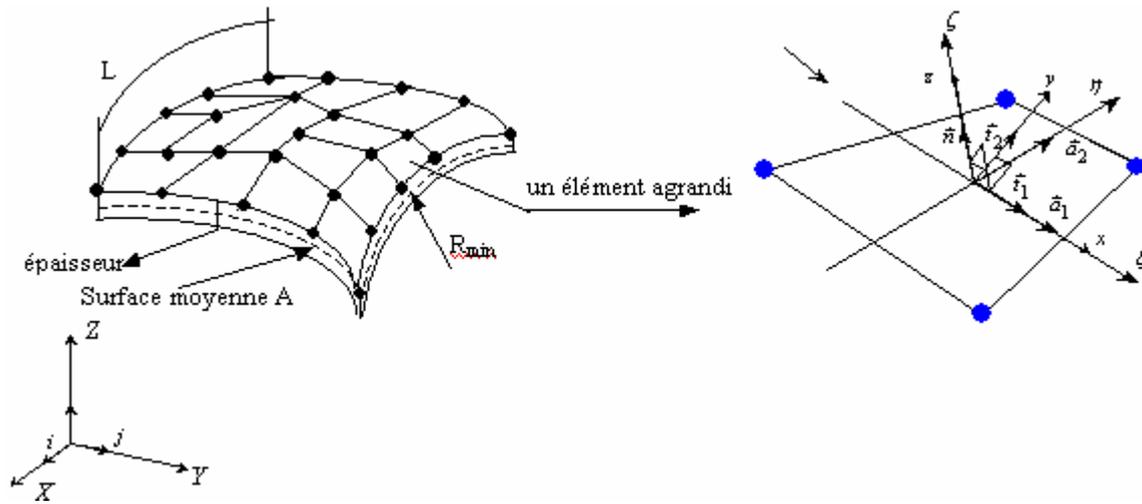
#### 4.2. Description géométrique d'une coque

Une coque est un corps tridimensionnel limité par deux surfaces courbes supérieure et inférieure, située à égale distance  $+h/2$  et  $-h/2$  d'une surface  $A$  appelée surface moyenne (Figure 4.1). La dimension  $h$ , appelée épaisseur, est supposée relativement petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques des surfaces courbes (longueur  $L$ , largeur  $l$ , rayon de courbure minimum  $R_{min}$ ). Cette épaisseur peut être variable mais nous la considérons comme constante dans nos différentes formulations. Nous supposons également que  $h/L$  et  $h/R_{min}$  sont très petits devant un.

#### 4.2.1. Description de la surface moyenne

La surface moyenne  $A$ , considérée comme surface de référence, est décrite par deux coordonnées paramétriques ou curvilignes  $(\xi, \eta)$ . Le vecteur position d'un point  $p$  de la surface moyenne, dans la configuration  $C(t)$ , est défini dans la base cartésienne globale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par :

$$\vec{x}_p(\xi, \eta) = X_p(\xi, \eta)\vec{i} + Y_p(\xi, \eta)\vec{j} + Z_p(\xi, \eta)\vec{k} \quad (4.1)$$



**Figure.4.1.** (a) géométrie 3D d'une coque

(b) un élément quadrilatéral courbe

Une écriture de l'expression de l'élément différentiel  $d\vec{x}_p$  au point  $p$  permet de définir les deux vecteurs d'une base dite covariante ou naturelle  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  :

$$d\vec{x}_p(\xi, \eta) = \vec{a}_1 d\xi + \vec{a}_2 d\eta \quad ; \quad \vec{a}_1 = \vec{x}_{p,\xi} \quad \text{et} \quad \vec{a}_2 = \vec{x}_{p,\eta} \quad (\text{Figure 4.1}) \quad (4.2)$$

$\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  sont tangents à leurs directions respectives  $\xi$  et  $\eta$ . On peut ainsi définir une base covariante tridimensionnelle  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n})$  ou sous forme matricielle  $[F_{0p}] = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{n}]$ .  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  ne sont pas nécessairement orthogonaux. Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal au plan tangent  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$  est défini par l'expression vectorielle suivante :

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|} \quad (4.3)$$

Une autre base, dite contravariante ou duale, notée  $(\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{n})$ , est nécessaire car elle permet de faciliter la représentation de certains tenseurs importants, utilisés par les modèles de coque NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml. Elle est définie telle que

$$[F_{0p}]^{-1}[F_{0p}] = [I] \quad ; \quad [F_{0p}]^{-T} = [\bar{a}^1 \quad \bar{a}^2 \quad \bar{n}] \quad (4.4a,b)$$

$\bar{a}^1$  et  $\bar{a}^2$  sont deux vecteurs tangents de cette 2<sup>ème</sup> base, ils sont orthogonaux à  $\bar{a}_1$  et  $\bar{a}_2$  respectivement :

$$\bar{a}^1 \cdot \bar{a}_2 = \bar{a}^2 \cdot \bar{a}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{a}^1 \cdot \bar{a}_1 = \bar{a}^2 \cdot \bar{a}_2 = 1 \quad (4.5)$$

Une relation entre les vecteurs des deux bases s'obtient à partir de l'équation (4.4.a) et de l'expression suivante du tenseur métrique  $[a]$  de la surface moyenne, défini en calculant le carré de la longueur du vecteur élément différentiel  $d\bar{x}_p$  :

$$ds_p^2 = d\bar{s}_p \cdot d\bar{s}_p = \langle d\xi \quad d\eta \rangle [a] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_1 & \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \\ \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_1 & \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{symétrique : } a_{21}=a_{12}) \quad (4.7)$$

En notant  $a = \det[a]$ , et d'après l'équation (4.5), on peut écrire :

$$\bar{a}^1 = \frac{1}{a}(a_{22}\bar{a}_1 - a_{12}\bar{a}_2) \quad ; \quad \bar{a}^2 = \frac{1}{a}(-a_{21}\bar{a}_1 + a_{11}\bar{a}_2) \quad (4.8)$$

Le vecteur élément différentiel d'aire  $d\bar{A}$  (utile pour le calcul intégral des modèles NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml) s'écrit, connaissant l'expression du vecteur normale  $\bar{n}$

$$d\bar{A} = \bar{a}_1 d\xi \wedge \bar{a}_2 d\eta = |\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2| d\xi d\eta \bar{n} = dA \bar{n} \quad (4.9)$$

$$dA = |\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2| d\xi d\eta = \sqrt{a} d\xi d\eta$$

#### a. Repère tangent orthonormé

Ce repère local au point  $p$ , de base cartésienne orthonormée  $[Q] = [\bar{t}_1 \quad \bar{t}_2 \quad \bar{n}]$ , est choisi comme un repère de base dans lequel seront définies certaines composantes des tenseurs de déformations et de contraintes des modèles NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml. Il n'existe pas de règles particulières pour le calcul de la base  $[Q]$ , nous pouvons choisir de définir par

exemple le vecteur  $\bar{t}_1$  comme étant porté par le vecteur covariant  $\bar{a}_1$  et normalisé par rapport à son module (4.1.b), nous écrivons

$$[Q] = [\bar{t}_1 \quad \bar{t}_2 \quad \bar{n}] \quad ; \quad \text{avec} \quad \bar{t}_1 = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|} \quad \text{et} \quad \bar{t}_2 = \bar{n} \wedge \bar{t}_1 \quad (4.10)$$

Ce choix permet effectivement de construire un repère local orthonormé au point  $p$ . Il présente néanmoins un inconvénient, celui d'être dépendant de la numérotation des nœuds dans la définition des deux vecteurs tangents, en particulier lorsqu'il s'agit d'éléments triangulaires. Pour palier à cet inconvénient, nous avons finalement choisi, pour l'ensemble de nos éléments finis de coque, la méthode proposée par Batoz et Dhatt [70], qui permet d'obtenir un repère orthonormé unique au point  $p$  de la surface moyenne, connaissant les composantes de la normale  $\bar{n}(n_x, n_y, n_z)$ . La matrice  $[Q]$  s'écrit dans ce cas

$$[Q] = [\bar{t}_1 \quad \bar{t}_2 \quad \bar{n}] = \begin{bmatrix} C + An_y^2 & -An_x n_y & n_x \\ -An_x n_y & C + An_x^2 & n_y \\ -n_x & -n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$A = \frac{1}{1+C} \quad ; \quad C = \bar{n} \cdot \bar{k} = n_z \quad ; \quad 1+C \neq 0 \quad (\bar{k} \neq \bar{n})$$

Cette matrice est obtenue par une rotation rigide du repère  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  autour de l'axe  $\bar{k} \wedge \bar{n}$  de telle sorte que le vecteur  $\bar{k}$  coïncide avec la normale  $\bar{n}$  après la rotation.  $\bar{n}$  est supposé non parallèle à  $\bar{k}$ . Si  $1+C \neq 0$ , c'est à dire  $\bar{k} = -\bar{n}$ , alors la matrice  $[Q]$  prendra la forme suivante

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ie} \quad (\bar{t}_1 \equiv \bar{i} \quad ; \quad \bar{t}_2 \equiv -\bar{j} \quad ; \quad \bar{n} \equiv -\bar{k} \quad ) \quad (4.12)$$

#### 4.2.2. Description d'un point quelconque de la coque

##### a. Base covariante au point $q$ : $[F_\zeta]$

La géométrie d'un élément quadrilatéral de coque à 4 nœuds isoparamétrique courbe, représenté par sa surface moyenne  $A$  et son épaisseur  $h$ , est décrite dans la figure 4.2. Le vecteur position d'un point matériel quelconque de la coque, noté  $q$ , et situé à une distance  $z$  de la surface moyenne, est défini par :

$$\bar{x}_q(\xi, \eta, \zeta) = \bar{x}_p(\xi, \eta) + z\bar{n}(\xi, \eta) \quad ; \quad z = \zeta \frac{h}{2} \quad ; \quad -1 \leq \zeta \leq +1 \quad (4.13)$$

Une approximation du vecteur  $\bar{x}_q$ , avec une interpolation bilinéaire en  $(\xi, \eta)$  pour les vecteurs  $\bar{x}_p$  et  $\bar{n}$ , est donnée par :

$$\bar{x}_q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \left( \bar{x}_{pi} + \zeta \frac{h}{2} \bar{n}_i \right) \quad (4.14)$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad ; \quad (\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1) \quad (4.15)$$

Une écriture de l'élément différentiel  $d\bar{x}_q$  permet de définir une base covariante au point  $q$ , notée  $(\bar{a}_{1\zeta}, \bar{a}_{2\zeta}, \bar{n})$  :

$$\{dx_q\} = [F_\zeta] \{d\xi\} \quad ; \quad [F_\zeta] = [\bar{a}_{1\zeta} \quad \bar{a}_{2\zeta} \quad \bar{n}] = [F_0] + \zeta [F_n] \quad (4.16a,b)$$

$$[F_0] = [\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \frac{h}{2} \bar{n}] \quad ; \quad [F_n] = [\frac{h}{2} \bar{n}_{,\xi} \quad \frac{h}{2} \bar{n}_{,\eta} \quad 0] \quad (4.17.a,b)$$

$$\det[F_0] = \frac{h}{2} (\bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2) \bullet \bar{n} = \frac{h}{2} \sqrt{a} \quad (4.18)$$

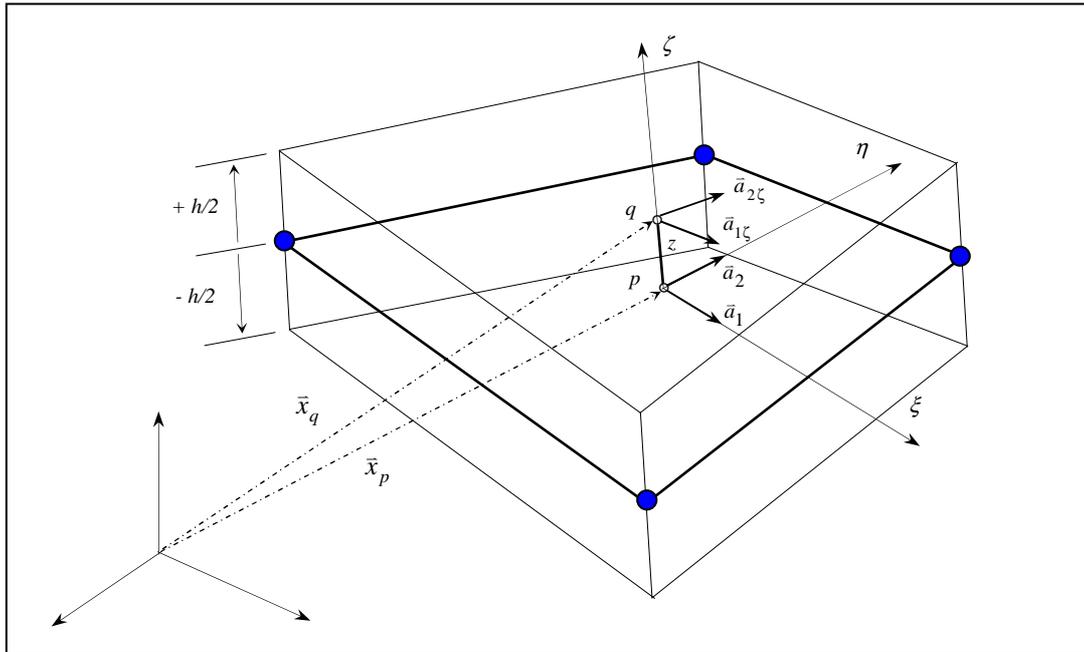
où

$$\bar{a}_1 = \sum_{i=1,4} N_{i,\xi} \bar{x}_{pi} \quad ; \quad \bar{a}_2 = \sum_{i=1,4} N_{i,\eta} \bar{x}_{pi} \quad ; \quad \bar{n} = \sum_{i=1,4} N_i \bar{n}_i \quad (4.19)$$

et

$$\bar{n}_{,\alpha} = \sum_{i=1,4} N_{i,\alpha} \bar{n}_i \quad ; \quad (\alpha = \xi, \eta) \quad ; \quad \langle x_{pi} \rangle = \langle X_i \quad Y_i \quad Z_i \rangle \quad (4.20)$$

Etant donné le choix de l'axe naturel  $\zeta$  comme la direction paramétrique de l'épaisseur, les matrices  $[F_0]$  et  $[F_n]$  font apparaître la demi épaisseur  $h/2$ , ce qui est logique par rapport à la définition initiale d'une coque. La matrice  $[F_\zeta]$  est linéaire en  $\zeta$ .



**Figure 4.2.** Géométrie d'un point quelconque  $q$

b. Définition d'un élément de volume

Un élément de volume  $dV$  au voisinage du point quelconque  $q$  est défini par :

$$dV = \det[F_\zeta] d\xi d\eta d\zeta \quad (4.21)$$

Le calcul de  $\det[F_\zeta]$  s'obtient en écrivant la matrice  $[F_\zeta]$  (rel 4.16b) comme suit :

$$[F_\zeta] = [F_0]([I] + \zeta[b_n]) \quad (4.22)$$

$$[b_n] = [F_0]^{-1}[F_n] = \begin{bmatrix} b_{n11} & b_{n12} & 0 \\ b_{n21} & b_{n22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \bar{a}^1 \cdot \bar{n}_{,\xi} & \bar{a}^1 \cdot \bar{n}_{,\eta} & 0 \\ \bar{a}^2 \cdot \bar{n}_{,\xi} & \bar{a}^2 \cdot \bar{n}_{,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Ainsi,  $\det[F_\zeta]$  s'écrit

$$\det[F_\zeta] = \mu(\zeta) \det[F_0] \quad ; \quad \det[F_0] \quad (\text{équation 4.18}) \quad (4.24)$$

$$\mu(\zeta) = \det([I] + \zeta[b_n]) = 1 - \zeta h H + \zeta^2 \frac{h^2}{4} K \quad (\text{quadratique en } \zeta^2) \quad (4.25)$$

$$H = -\frac{1}{h} (b_{n11} + b_{n22}) = -\frac{1}{2} (\bar{a}^1 \cdot \bar{n}_{,\xi} + \bar{a}^2 \cdot \bar{n}_{,\eta}) \quad (4.26)$$

$$K = \frac{4}{h^2} (b_{n11}b_{n22} - b_{n12}b_{n21}) = (\bar{a}^1 \cdot \bar{n}_{,\xi})(\bar{a}^2 \cdot \bar{n}_{,\eta}) - (\bar{a}^1 \cdot \bar{n}_{,\eta})(\bar{a}^2 \cdot \bar{n}_{,\xi}) \quad (4.27)$$

$H$  et  $K$  sont respectivement les courbures moyenne et totale (gaussienne).

L'élément de volume  $dV$  s'écrit ainsi en fonction de  $\mu(\zeta)$  :

$$dV = \mu(\zeta) \frac{h}{2} \sqrt{ad} d\xi d\eta d\zeta \quad (4.28)$$

c. Base contravariante au point  $q$  :  $[F_\zeta]^{-1}$

En utilisant l'équation (4.22), on peut écrire

$$[F_\zeta]^{-1} = ([I] + \zeta[b_n])^{-1} [F_0]^{-1} = \left( [\bar{I}] + \frac{\zeta}{\mu(\zeta)} [\bar{b}] \right) [F_0]^{-1} \quad (4.29)$$

avec

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} 1/\mu(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu(\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [\bar{b}] = \begin{bmatrix} b_{n22} & -b_{n12} & 0 \\ -b_{n21} & b_{n11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

d. *Passage du repère naturel au repère tangent : matrice  $[C_\zeta]$*

Le passage du repère naturel ou covariant, de coordonnées  $(\xi, \eta, \zeta)$ , au repère tangent, de coordonnées  $(x, y, z)$ , permet de définir une matrice très importante  $[C_\zeta]$ , qui va prendre en compte le gauchissement de la coque.  $[C_\zeta]$  est une matrice dont les termes sont équivalents à ceux de la matrice jacobienne inverse pour le cas d'une coque à facettes planes. Dans le cas présent, la coque est courbe, les termes de cette matrice sont fonction de  $(\xi, \eta, \zeta)$  et font intervenir les termes relatifs au gauchissement de la coque, ainsi que les vecteurs des bases contravariante  $(\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{n})$  et cartésienne locale  $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n})$ .

Ainsi, de l'équation 4.16a, on peut écrire

$$\{d\xi\} = [F_\zeta]^{-1} \{dx_q\} = [C_\zeta] \{dx_q\}_{loc} \quad ; \quad \{dx_q\}_{loc}^T = \langle dx \, dy \, dz \rangle \quad (4.31)$$

avec 
$$[C_\zeta] = [F_\zeta]^{-1} [Q] \quad (4.32)$$

En utilisant l'équation 4.29,

$$[C_\zeta] = \left( [\bar{I}] + \frac{\zeta}{\mu(\zeta)} [\bar{b}] \right) [C_0] = [\bar{I}] [C_0] + \frac{\zeta}{\mu(\zeta)} [b_c] \quad ; \quad [b_c] = [\bar{b}] [C_0] \quad (4.33a,b)$$

Où 
$$[C_0] = [F_0]^{-1} [Q] \quad ; \quad [C_0] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2/h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}^1 \cdot \bar{t}_1 & \bar{a}^1 \cdot \bar{t}_2 & 0 \\ \bar{a}^2 \cdot \bar{t}_1 & \bar{a}^2 \cdot \bar{t}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/h \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

et 
$$[b_c] = [\bar{b}] [C_0] = \begin{bmatrix} b_{c11} & b_{c12} & 0 \\ b_{c21} & b_{c22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Remarques :

- Dans les modèles NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml, on admettra que, pour une coque relativement mince, le coefficient. On obtient ainsi une expression simplifiée de la matrice  $[C_\zeta]$  :

$$[C_\zeta] = [C_0] + \zeta [b_c] \quad (4.36)$$

- La formulation variationnelle des deux modèles NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml (section 4.6) utilisera la matrice  $[C_0]$  pour définir les déformations cartésiennes locales de membrane, de flexion et de cisaillement transversal, définies dans la base  $[Q]$ , en fonction des déformations covariantes. La matrice  $[b_c]$  permet de mettre en évidence l'existence du couplage membrane-flexion.

### 4.3. Champs des déplacements virtuels

Le champ des déplacements virtuels  $u_q^*(\xi, \eta, \zeta)$  du point matériel  $q$  est défini, avec l'hypothèse des sections droites de Hencky/Reissner/Mindlin [50, 51], par (voir figure 4.3) :

$$\bar{u}_q^*(\xi, \eta, \zeta) = \bar{u}_p^*(\xi, \eta) + z\bar{\beta}^*(\xi, \eta) \quad ; \quad z = \zeta \frac{h}{2} \quad (4.37)$$

avec 
$$\bar{\beta}^* = \bar{\theta}^* \wedge \bar{n} \quad \text{et} \quad \bar{\beta}^* \bullet \bar{n} = 0 \quad (4.38)$$

$\bar{u}_p^*(\xi, \eta)$  est le vecteur des déplacements virtuels du point  $p$  de la surface moyenne ( $\zeta=0$ ).  $\bar{\theta}^*$  est le vecteur rotation orthogonal à  $\bar{n}$ , il s'écrit respectivement dans les deux bases cartésiennes locale  $[Q]$  et globale  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  :

$$\bar{\theta}^* = \theta_x^* \bar{i}_1 + \theta_y^* \bar{i}_2 = \theta_x^* \bar{i} + \theta_y^* \bar{j} + \theta_z^* \bar{k} \quad (4.39)$$

$$\text{ainsi, } \begin{Bmatrix} \theta_x^* \\ \theta_y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x^* \\ \theta_y^* \\ \theta_z^* \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Le produit  $\bar{\beta}^* = \bar{\theta}^* \wedge \bar{n}$  conduit à  $\bar{\beta}^* = -\theta_x^* \bar{i}_2 + \theta_y^* \bar{i}_1$

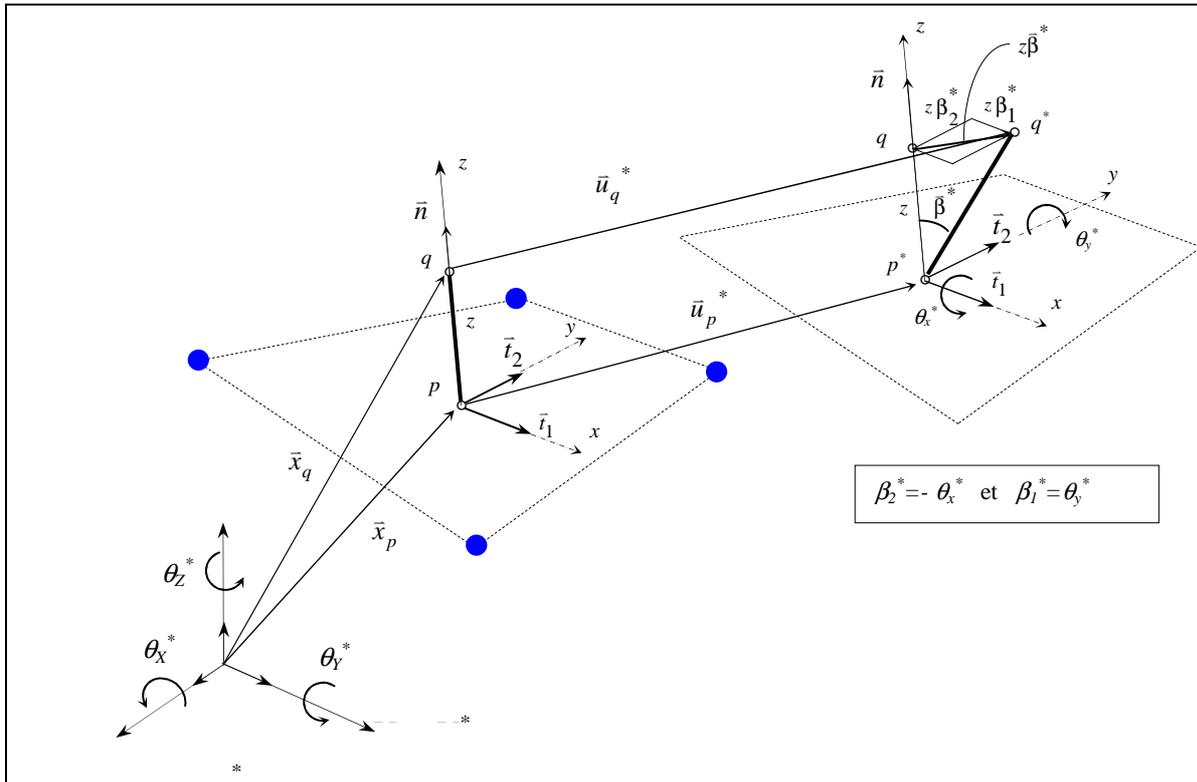
Soit, en fonction des rotations globales

$$\bar{\beta}^* = \begin{bmatrix} -\bar{i}_2 & \bar{i}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x^* \\ \theta_y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x^* \\ \theta_y^* \\ \theta_z^* \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Si l'on note par  $(U^*, V^*, W^*)$  les composantes du vecteurs  $\bar{u}_p^*$  dans le repère global, l'expression finale du vecteur  $\bar{u}_q^*$  s'écrit

$$\bar{\mathbf{u}}_q^* = \begin{Bmatrix} U^* \\ V^* \\ W^* \end{Bmatrix} + \zeta \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x^* \\ \theta_y^* \\ \theta_z^* \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

Ce vecteur est ainsi défini en fonction de six composantes indépendantes (trois déplacements  $U^*, V^*, W^*$  et trois rotations  $\theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^*$ ).



**Figure 4.3.** Cinématique virtuelle d'une fibre quelconque pq

#### 4.4. Champs des déformations virtuelles

##### 4.4.1. Définition complète sans simplifications

L'objectif de cette section est la détermination des composantes virtuelles du tenseur des déformations  $[\boldsymbol{\varepsilon}_t^*]$  dans le système de base cartésienne locale, de matrices  $[Q]$  (pour le point  $p^*$ ) et  $[Q_\zeta]$  (pour le point  $q^*$ ). Comme l'épaisseur de la coque est constante par élément, la matrice  $[Q]$  ne varie pas selon la direction  $\zeta$ , nous écrivons alors  $[Q_\zeta] = [Q]$ . Le tenseur  $[\boldsymbol{\varepsilon}_t^*]$  est calculé à partir d'une procédure cinématique consistant à définir, dans le repère tangent

local de base  $[Q]$  (équation 4.12), l'accroissement du vecteur déplacement virtuel  $d\bar{u}_q^*$  par rapport à celui du vecteur position virtuelle  $d\bar{x}_q^*$ .

Le vecteur position virtuelle  $\bar{x}_q^*$  (figure 4.3) résulte de la superposition du vecteur  $\bar{x}_q$  et de celui du déplacement virtuel  $\bar{u}_q^*$  :

$$\bar{x}_q^*(\xi, \eta, \zeta) = \bar{x}_q(\xi, \eta, \zeta) + \bar{u}_q^*(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.43)$$

Avec  $\bar{x}_q$  (équation 4.14) et  $\bar{u}_q^*$  (équation 4.42).

Un élément différentiel du vecteur position au voisinage du point virtuel  $q^*$  s'écrit

$$d\bar{x}_q^* = d\bar{x}_q + d\bar{u}_q^* \quad (4.44)$$

Ainsi, des équations 4.13 et 4.37, nous déduisons

$$\{dx_q\} = [F_\zeta] \{d\xi\} \quad (\text{équation 4.16a}) \quad ; \quad \{d\xi\} = [F_\zeta]^{-1} \{dx_q\}$$

et 
$$\{du_q^*\} = [L_\zeta^*] \{d\xi\} = [L_\zeta^*] [F_\zeta]^{-1} \{dx_q\} \quad (4.45)$$

avec 
$$[L_\zeta^*] = [L_0^*] + \zeta [L_\beta^*] \quad (\text{linéaire en } \zeta) \quad (4.46)$$

$$[L_0^*] = \begin{bmatrix} \bar{u}_{p,\xi}^* & \bar{u}_{p,\eta}^* & \frac{h}{2} \bar{\beta}^* \end{bmatrix} \quad ; \quad [L_\beta^*] = \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \bar{\beta}_{,\xi}^* & \frac{h}{2} \bar{\beta}_{,\eta}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Les composantes cartésiennes globales et locales des vecteurs  $d\bar{u}_q^*$  et  $d\bar{x}_q$  sont reliées entre elles par la matrice  $[Q]$ , nous écrivons

$$\{du_q^*\} = [Q] \{du_q^*\}_{loc} \quad \text{et} \quad \{dx_q\} = [Q] \{dx_q\}_{loc} \quad (4.48)$$

Nous aboutissons finalement à

$$\{du_q^*\}_{loc} = [L_t^*] \{dx_q\}_{loc} \quad ; \quad [L_t^*] = [Q]^T [L_\zeta^*] [C_\zeta] \quad (4.49)$$

$$[C_\zeta] \quad (\text{équation 4.33})$$

Compte tenu des développements précédents, et avec l'hypothèse des petites déformations, on peut ainsi définir les composantes du tenseur des déformations virtuelles dans la base  $[Q]$  comme suit

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_t^*] = \frac{1}{2} \left( [L_t^*] + [L_t^*]^T \right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^* & \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{xy}^* & \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{xz}^* \\ & \boldsymbol{\varepsilon}_y^* & \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{yz}^* \\ Sym & & \boldsymbol{\varepsilon}_z^* \end{bmatrix} ; [L_t^*] = \begin{bmatrix} L_{t11}^* & L_{t12}^* & L_{t13}^* \\ L_{t21}^* & L_{t22}^* & L_{t23}^* \\ L_{t31}^* & L_{t32}^* & L_{t33}^* \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Le tenseur  $[L_t^*]$  (équations 4.49 et 4.50) fait intervenir des fonctions rationnelles et quadratiques en  $\zeta$ . Il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[L_t^*] = \frac{1}{\mu(\zeta)} \left( [L_{t0}^*] + \zeta [L_{t1}^*] + \zeta^2 [L_{t2}^*] \right) \quad (4.51)$$

une expression générale, sans simplifications, des tenseurs  $[L_{t0}^*]$ ,  $[L_{t1}^*]$  et  $[L_{t2}^*]$  s'écrit, en tenant compte des expressions de  $[L_\zeta^*]$  (équations 4.46 et 4.47) et de  $[C_\zeta]$  (équation 4.33) :

$$[L_{t0}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{p,\xi}^* & \bar{\mathbf{u}}_{p,\eta}^* & \mu(\zeta) \frac{h}{2} \bar{\boldsymbol{\beta}}^* \end{bmatrix} [C_0] ; [C_0] \quad (\text{équation 4.34}) \quad (4.52a)$$

$$[L_{t1}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{p,\xi}^* & \bar{\mathbf{u}}_{p,\eta}^* & \frac{h}{2} \bar{\boldsymbol{\beta}}^* \end{bmatrix} [b_c] + \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{,\xi}^* & \frac{h}{2} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{,\eta}^* & 0 \end{bmatrix} [C_0] \quad (4.52b)$$

$$[L_{t2}^*] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{2} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{,\xi}^* & \frac{h}{2} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{,\eta}^* & 0 \end{bmatrix} [b_c] ; [b_c] \quad (\text{équation 4.35}) \quad (4.52c)$$

On notera respectivement par  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_s^* \rangle$  et  $\langle \boldsymbol{\gamma}_s^* \rangle$  les vecteurs des déformations virtuelles de membrane-flexion et de cisaillement transversal ( $\boldsymbol{\varepsilon}_z^*$  étant nulle) :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_t^* \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_s^* \rangle \quad \langle \boldsymbol{\gamma}_s^* \rangle ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z^* = 0 \quad (4.53)$$

avec  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_s^* \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_x^* \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y^* \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy}^* \rangle ; \quad \langle \boldsymbol{\gamma}_s^* \rangle = \langle \boldsymbol{\gamma}_{xz}^* \quad \boldsymbol{\gamma}_{yz}^* \rangle \quad (4.54)$

Ces deux vecteurs seront associés à ceux des contraintes correspondantes pour formuler les nouveaux modèles mixtes-hybrides naturels de coques composites NHMiSP4/ml, HMiSP/Q4/ml.

En se basant sur les équations 4.51 et 4.52,  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_s^* \rangle$  et  $\langle \boldsymbol{\gamma}_s^* \rangle$  s'écrivent

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_s^* \rangle &= \langle L_{t11}^* \quad L_{t22}^* \quad L_{t12}^* + L_{t21}^* \rangle \\
&= \frac{1}{\mu(\zeta)} \langle \varepsilon_0^* \rangle + \zeta \langle \varepsilon_1^* \rangle + \zeta^2 \langle \varepsilon_2^* \rangle
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_s^* \rangle &= \langle L_{t13}^* + L_{t31}^* \quad L_{t23}^* + L_{t32}^* \rangle \\
&= \frac{1}{\mu(\zeta)} \langle \gamma_0^* \rangle + \zeta \langle \gamma_1^* \rangle
\end{aligned} \tag{4.56}$$

avec, pour les déformations  $\langle \varepsilon_s^* \rangle$

$$\{\varepsilon_0^*\} = \begin{Bmatrix} e_x^* \\ e_y^* \\ e_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{t}_1 \bullet \bar{u}_{p,x}^* \\ \bar{t}_2 \bullet \bar{u}_{p,y}^* \\ \bar{t}_1 \bullet \bar{u}_{p,y}^* + \bar{t}_2 \bullet \bar{u}_{p,x}^* \end{Bmatrix} \rightarrow (\text{membrane}) \tag{4.57}$$

$$\{\varepsilon_1^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x1}^* \\ \varepsilon_{y1}^* \\ \gamma_{xy1}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h}{2} \bar{t}_1 \bullet \bar{\beta}_{,x}^* \\ \frac{h}{2} \bar{t}_2 \bullet \bar{\beta}_{,y}^* \\ \frac{h}{2} (\bar{t}_1 \bullet \bar{\beta}_{,y}^* + \bar{t}_2 \bullet \bar{\beta}_{,x}^*) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{t}_1 \bullet \bar{u}_{p,x}^* \\ \bar{t}_2 \bullet \bar{u}_{p,y}^* \\ \bar{t}_1 \bullet \bar{u}_{p,y}^* + \bar{t}_2 \bullet \bar{u}_{p,x}^* \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \text{flexion} \\ + \\ \text{couplage} \\ \text{avec membrane} \end{Bmatrix} \tag{4.58}$$

$$\{\varepsilon_2^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x1}^* \\ \varepsilon_{y1}^* \\ \gamma_{xy1}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h}{2} \bar{t}_1 \bullet \bar{\beta}_{,x}^* \\ \frac{h}{2} \bar{t}_2 \bullet \bar{\beta}_{,y}^* \\ \frac{h}{2} (\bar{t}_1 \bullet \bar{\beta}_{,y}^* + \bar{t}_2 \bullet \bar{\beta}_{,x}^*) \end{Bmatrix} \tag{4.59}$$

et avec, pour les déformations de CT  $\langle \gamma_s^* \rangle$

$$\{\gamma_0^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{n} \bullet \bar{u}_{p,x}^* + \mu \bar{t}_1 \bullet \bar{\beta}^* \\ \bar{n} \bullet \bar{u}_{p,y}^* + \mu \bar{t}_2 \bullet \bar{\beta}^* \end{Bmatrix} \tag{4.60}$$

$$\{\gamma_1^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{1,xz}^* \\ \gamma_{1,yz}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{n} \bullet \bar{u}_{p,x}^* + \frac{h}{2} \bar{n} \bullet \bar{\beta}_{,x}^* \\ \bar{n} \bullet \bar{u}_{p,y}^* + \frac{h}{2} \bar{n} \bullet \bar{\beta}_{,y}^* \end{Bmatrix} \tag{4.61}$$

où

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{p,x}^* \\ \bar{u}_{p,y}^* \end{Bmatrix} = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_{p,\xi}^* \\ \bar{u}_{p,\eta}^* \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_{p,x}^* \\ \bar{u}_{p,y}^* \end{Bmatrix} = [b_c]^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_{p,\xi}^* \\ \bar{u}_{p,\eta}^* \end{Bmatrix} ; \quad [C_0] \text{ (équation 4.34)} \tag{4.62}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\beta}_{,x}^* \\ \bar{\beta}_{,y}^* \end{Bmatrix} = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_{,\xi}^* \\ \bar{\beta}_{,\eta}^* \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_{,x}^* \\ \bar{\beta}_{,y}^* \end{Bmatrix} = [b_c]^T \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_{,\xi}^* \\ \bar{\beta}_{,\eta}^* \end{Bmatrix} \quad ; \quad [b_c] \text{ (équation 4.35)} \quad (4.63)$$

#### 4.4.2. Expressions simplifiées des déformations virtuelles

Les expressions des formulations variationnelles mixtes-hybrides sont assez complexes à mettre en œuvre. Une définition cohérente et représentative de l'ensemble des déformations d'une coque (membrane, flexion et CT) consiste à négliger les courbures moyenne et gaussienne et à considérer respectivement des variations linéaire et constante en  $\zeta$  pour  $\langle \varepsilon_s^* \rangle$  et  $\langle \gamma_s^* \rangle$ . Cela revient à écrire  $\mu(\zeta) \approx 1$  et

$$\langle \varepsilon_s^* \rangle = \langle \varepsilon_0^* \rangle + \zeta \langle \varepsilon_1^* \rangle \quad (4.64)$$

$$\langle \gamma_s^* \rangle = \langle \gamma_0^* \rangle = \{\gamma_0^*\}^T \quad ; \quad \{\gamma_0^*\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^* \\ \gamma_{yz}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{n} \bullet \bar{u}_{p,x}^* + \bar{t}_1 \bullet \bar{\beta}^* \\ \bar{n} \bullet \bar{u}_{p,y}^* + \bar{t}_2 \bullet \bar{\beta}^* \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

Ces nouvelles expressions seront considérées pour la formulation des modèles NHMiSP4/ml et HMiSP/Q4/ml.

### 4.5. Introduction aux modèles de coques développés selon la définition de la partie membrane

Dans cette section, nous établissons les expressions mécaniques des contraintes de membrane permettant de distinguer les deux modèles d'éléments finis à 4 nœuds mixtes-hybrides de coque composites annoncés dans les sections précédentes, c'ad NHMiSP4/ml et HMiSP/Q4/ml. La formulation variationnelle en flexion et cisaillement transversal reste identique pour les deux modèles (section 4.6).

#### 4.5.1 Contraintes de membrane pour le modèle HMiSP4/Q4/ml

Le modèle de coque multicouches HMiSP4/Q4/ml considère que la loi de comportement élastique en membrane  $\{\sigma_0\} = [H]\{\varepsilon_0\}$  est satisfaite explicitement dans le formalisme variationnel correspondant. Les contraintes de membranes ne pourront plus bénéficier des approximations de type  $C^{-1}$  classiquement attribuées aux éléments mixtes. Elles seront calculées en fonctions des variables nodales de déplacement via le vecteur déformation  $\{\varepsilon_0\}$ . Nous y reviendrons sur la formulation détaillée de ce modèle dans la section 4.6.

#### 4.5.2 Contraintes de membrane pour le modèle NHMiSP4/ml

Le modèle de coque multicouches NHMiSP4/ml considère que la formulation de la membrane est complètement hybride naturelle. Celle-ci s'inspire d'une approximation de type  $C^{-1}$  des contraintes de membranes  $\{\sigma_0\}$  proposée initialement par Pian [70] et améliorée par Ayad [68] afin d'obtenir un élément fini moins sensible aux distorsions de maillages. Ayad [68] propose de définir  $\{\sigma_0\}$  comme suit :

$$\{\sigma_0\} = [T_0] \{\sigma_0^{ij}\} , \text{ avec } [T_0] = \frac{1}{c_0^2} \begin{bmatrix} C_{22}^2 & C_{12}^2 & -2C_{22}C_{12} \\ C_{21}^2 & C_{11}^2 & -2C_{21}C_{11} \\ C_{22}C_{21} & -C_{12}C_{11} & C_{22}C_{11} + C_{12}C_{21} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Avec  $c_0 = \frac{h}{2} \det[C_0]$  ,  $C_{11}$  ,  $C_{22}$  ,  $C_{12}$  ,  $C_{21}$  sont les termes de la matrice  $[C_0]$ .

$\{\sigma_0^{ij}\}$  sont les contraintes contravariantes satisfaisantes l'équilibre bidimensionnel dans le repère naturel  $(\xi, \eta)$ , d'où l'appellation « hybride naturelle » pour ce modèle. Ces contraintes sont interpolées de la manière suivante (proposition de Pian) :

$$\{\sigma_0^{ij}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_0^{\xi\xi} \\ \sigma_0^{\eta\eta} \\ \tau_0^{\xi\eta} \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha_m\} \quad (4.67)$$

avec ;

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \{\alpha_m\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

L'expression finale des contraintes cartésiennes de membrane s'écrit ainsi :

$$\{\sigma_0\} = [P_0] \{\alpha_m\} \quad (4.69)$$

$$[P_0] = [T_0][A] = \frac{1}{c_0^2} \begin{bmatrix} C_{22}^2 & C_{12}^2 & -2C_{22}C_{12} & \eta C_{22}^2 & \xi C_{12}^2 \\ C_{21}^2 & C_{11}^2 & -2C_{21}C_{11} & \eta C_{21}^2 & \xi C_{11}^2 \\ -C_{22}C_{21} & -C_{12}C_{11} & C_{22}C_{11} + C_{12}C_{21} & -\eta C_{22}C_{21} & -\xi C_{12}C_{11} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

C'est cette définition de  $\{\sigma_0\}$  qui sera utilisée dans la formulation du modèle mixte-hybride naturel NHMISP4/ml. Le nombre de paramètres  $\alpha_m$  est égal à 5 ( $n(\alpha_m) = 5$ ).

## 4.6. Formulation variationnelle mixte classique avec intégration explicite suivant l'épaisseur

### 4.6.1. Principe variationnel mixte-hybride (Hellinger-Reissner)

Nous commençons par rappeler l'expression des travaux virtuels associés à l'équilibre d'une coque de Reissner-Mindlin :

$$W = \sum_{\text{éléments}} (W_{\text{int}}^e - W_{\text{ext}}^e) = 0 \quad \forall \bar{u}_q^* \quad (\text{équations 4.37 et 4.42}) \quad (4.71)$$

avec ;

$$\bar{u}_q = \bar{\bar{u}}_q \quad \text{et} \quad \bar{u}_q^* = \bar{0} \quad \text{sur} \quad S_u$$

$$W_{\text{int}}^e = W_{mf}^e + W_c^e \quad (\text{travail virtuel interne}) \quad (4.72)$$

$$W_{mf}^e = \int_{V^e} (\langle \varepsilon_s^* \rangle \{ \sigma_s \} + \langle \sigma_s^* \rangle \{ \varepsilon_s \} - \langle \sigma_s^* \rangle [H]^{-1} \{ \sigma_s \}) dV \quad (4.73)$$

$$W_c^e = \int_{V^e} (\langle \gamma_s^* \rangle \{ \tau_s \} + \langle \tau_s^* \rangle \{ \gamma_s \} - \langle \tau_s^* \rangle [G]^{-1} \{ \tau_s \}) dV \quad (4.74)$$

$$W_{\text{ext}}^e = \int_{V^e} \bar{u}_q^* \cdot \bar{f}_v dV + \int_{S_f^e} \bar{u}_q^* \cdot \bar{f}_s dS \quad (4.75)$$

L'espace fonctionnel admissible pour les contraintes  $\{ \sigma_s \}$  et  $\{ \tau_s \}$  est de type  $C^{-1}$ , elles sont définies et continues localement sur l'élément. L'approximation de ces contraintes doit contenir au moins cinq termes constants et trois termes de  $\{ \sigma_s \}$  linéaires en  $\zeta$  (état de contraintes pour une plaque en membrane-flexion/CT par exemple). Les paramètres d'approximation de ces deux vecteurs doivent assurer un rang correct à la matrice de rigidité élémentaire finale, obtenue après leur élimination par condensation statique. Ils doivent donc vérifier la condition de stabilité (nécessaire et non suffisante) suivante : (  $n(u_n) = 20$  pour un élément à 4 nœuds dans son repère local )

$$n(\alpha_{mf}) + n(\alpha_c) \geq n(u_n) - 6 \quad (4.76)$$

$n(\alpha_{mf})$  et  $n(\alpha_c)$  représentent les nombres de paramètres d'approximations des contraintes  $\{ \sigma_s \}$  et  $\{ \tau_s \}$  respectivement. Ils doivent être choisis de telle manière que le modèle mixte finale ne soit pas équivalent au modèle déplacement correspondant.

Nous définissons une approximation linéaire en  $\zeta$  pour  $\{ \sigma_s \}$  et quadratique en  $\zeta$  pour  $\{ \tau_s \}$  :

$$\{\sigma_s\} = \{\sigma_0\} + \zeta \{\sigma_1\} \quad ; \quad \{\tau_s\} = (1 - \zeta^2) \{\tau_0\} \quad (4.77a,b)$$

$$\{\sigma_0\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \sigma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} \text{contraintes} \\ \text{de membrane} \end{array} \right) \quad ; \quad \{\sigma_1\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x1} \\ \sigma_{y1} \\ \sigma_{xy1} \end{Bmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} \text{contraintes} \\ \text{de flexion} \end{array} \right) \quad (4.78a,b)$$

$$\{\tau_0\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz0} \\ \tau_{yz0} \end{Bmatrix} \quad \left( \begin{array}{l} \text{contraintes de CT} \\ \text{au point } p(\zeta = 0) \end{array} \right) \quad (4.79)$$

Une intégration explicite suivant  $\zeta$  des formes mixtes élémentaires  $W_{mf}^e$  (4.73) et  $W_c^e$  (4.74) est réalisée dans un premier temps. Nous obtenons respectivement, en tenant compte des approximations des vecteurs  $\{\sigma_s\}$  et  $\{\tau_s\}$  :

\* Pour l'élément HMiSP4/ml/Q4 :

La partie membrane est formulée en déplacement. La loi de comportement en membrane  $\{\sigma_0\} = [H]\{\varepsilon_0\}$  est satisfaite explicitement ; ce qui conduit à écrire  $n(\alpha_{mf}) = n(\alpha_f)$  avec  $n(\alpha_m) = 0$  (pas d'approximation  $C^{-1}$  des contraintes de membrane  $\{\sigma_0\}$ ). Nous écrivons donc

$$W_{mf}^e = \int_{A^e} \left( \begin{array}{l} \langle \varepsilon_0^* \rangle [H_m]\{\varepsilon_0\} + \langle \varepsilon_1^* \rangle [H_{mf}]\{\varepsilon_0\} + \langle \varepsilon_0^* \rangle [H_{mf}]^T \{\varepsilon_1\} + \\ \left( \frac{h}{3} \langle \varepsilon_1^* \rangle \{\sigma_1\} + \frac{h}{3} \langle \sigma_1^* \rangle \{\varepsilon_1\} - \frac{h^4}{36} \langle \sigma_1^* \rangle [\bar{H}_f]\{\sigma_1\} \right) \end{array} \right) dA \quad (4.80)$$

\* Pour l'élément NHMiSP4/ml :

La partie membrane est hybride naturelle au sens de Pian. La loi de comportement en membrane  $\{\sigma_0\} = [H]\{\varepsilon_0\}$  n'est plus satisfaite explicitement ; d'où l'approximation  $C^{-1}$  à 5 paramètres  $\alpha_m$  des contraintes de membrane  $\{\sigma_0\}$  (équation 4.70). Nous écrivons donc

$$W_{mf}^e = \int_{A^e} \left( \begin{array}{l} h \langle \sigma_0^* \rangle \{\varepsilon_0\} + h \langle \varepsilon_0^* \rangle \langle \sigma_0 \rangle + \frac{h}{3} \langle \varepsilon_1^* \rangle \{\sigma_1\} + \frac{h}{3} \langle \sigma_1^* \rangle \{\varepsilon_1\} \\ - \langle \sigma_0^* \rangle [\bar{H}_m]\{\sigma_0\} \\ - \frac{h^4}{36} \langle \sigma_1^* \rangle [\bar{H}_f]\{\sigma_1\} - \langle \sigma_0^* \rangle [\bar{H}_{mf}]\{\sigma_1\} - \langle \sigma_1^* \rangle [\bar{H}_{mf}]^T \{\sigma_0\} \end{array} \right) dA \quad (4.81)$$

La forme mixte  $W_c^e$  reste identique pour les deux éléments :

$$W_c^e = \int_{A^e} \left( \frac{2h}{3} \langle \gamma_0^* \rangle \{\tau_0\} + \frac{2h}{3} \langle \tau_0^* \rangle \{\gamma_0\} - \frac{h^2}{16} \langle \tau_0^* \rangle [\bar{H}_c]\{\tau_0\} \right) dA \quad (4.82)$$

Avec pour les deux formes ;

$$\left\{ \begin{array}{l} [H_m] = \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1} - z_i) [H]_i ; [H_{mf}] = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1}^2 - z_i^2) [H]_i \quad ; \quad [\bar{H}_f] = \left( \sum_{i=1}^{nc} \frac{(z_{i+1}^3 - z_i^3)}{3} [H]_i \right)^{-1} \\ [\bar{H}_c] = \sum_{i=1}^{nc} [(z_{i+1} - z_i) + \frac{16}{5h^4} (z_{i+1}^5 - z_i^5) - \frac{8}{3h^2} (z_{i+1}^3 - z_i^3)] [G]_i^{-1} \\ [\bar{H}_{mf}] = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1}^2 - z_i^2) [H]_i^{-1} \quad ; \quad [\bar{H}_m] = \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1} - z_i) [H]_i^{-1} \end{array} \right. \quad (4.83)$$

Remarque très importante sur l'aspect original de nos modèles de coque proposés:

Comme il a été signalé en introduction, les deux éléments finis mixtes-hybrides de coques proposés HMiSP4/ml/Q4 et NHMiSP4/ml sont des modèles de premier ordre, basés sur la théorie linéaire de Reissner-Mindlin, qui évitent l'utilisation de facteurs de correction du CT pour les structures multicouches. Il convient de signaler que le non recours à ces facteurs correctifs reviendrait à définir la nouvelle matrice de comportement en CT  $[\bar{H}_c]$  comme une expression faisant apparaître explicitement sur les couches des termes linéaires en  $z$ , cubiques et d'ordre 5 (voir équation 4.83).

#### 4.6.2. Approximation des contraintes planes (continuité $C^{-1}$ )

Pour un élément quadrilatéral à 4 nœuds, l'approximation du vecteur des contraintes est définie par :

$$\{\sigma_1\} = [P_1] \{\alpha_f\} \quad , \quad [P_1] = \begin{bmatrix} \langle p \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle p \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle p \rangle \end{bmatrix} \quad , \quad \langle p \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \rangle \quad (4.84)$$

avec  $\langle \alpha_f \rangle = \langle \alpha_i \quad \dots \quad i = 1 \text{ à } 12 \rangle$  equ(2.37)

$n(\alpha_c)$  est égale à  $n(\alpha_f)$ , étant donné que l'approximation du vecteur  $\{\tau_0\}$  est déduite de celle du vecteur  $\{\sigma_1\}$  en utilisant les équations d'équilibres 3D en contraintes ( $\{\tau_0\} = \frac{h}{4} \{\text{div}[\sigma_1]\}$ , équation 2.39 du chapitre 2). La condition de stabilité (4.76) est ainsi satisfaite pour le modèle de coque complètement hybride en membrane NHMiSP4/ml. Elle l'est également pour le modèle HMiSP4/Q4/ml avec  $n(\alpha_m) = 0$ .

Nous écrivons donc :

$$\{\tau_0\} = \frac{h}{4} \{\text{div}[\sigma_1]\} \quad ; \quad \{\text{div}[\sigma_1]\} = [P_\tau] \{\alpha_f\} \quad , \quad [P_\tau] = \begin{bmatrix} \langle p_1 \rangle & \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle p_2 \rangle & \langle p_1 \rangle \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Les vecteurs  $\langle P_i \rangle$  ( $i=1,2$ ) sont donnés par :

$$\begin{aligned}\langle p_1 \rangle &= \langle 0 \quad C_{11} \quad C_{12} \quad \eta C_{11} + \xi C_{21} \rangle; \\ \langle p_2 \rangle &= \langle 0 \quad C_{12} \quad C_{22} \quad \eta C_{12} + \xi C_{22} \rangle\end{aligned}\quad (4.86)$$

#### 4.6.3. Approximation des variables cinématiques

Nous commençons par définir une interpolation bilinéaire standard pour les déplacements  $\bar{u}_p^*$  et les rotations  $\bar{\beta}^*$  (continuité  $C^0$ ), intervenant dans l'expression du vecteur déplacements virtuels  $\bar{u}_q^*$  (équation 4.37) :

$$\{u_q^*\} = \sum_{i=1}^4 N_i \{u_{qi}^*\} \quad ; \quad \{u_{qi}^*\} = \{u_{pi}^*\} + \zeta \frac{h}{2} \{\beta_i^*\} \quad ; \quad N_i \text{ (équation 4.15)} \quad (4.87)$$

$$\{u_{pi}^*\} = \begin{Bmatrix} U_i^* \\ V_i^* \\ W_i^* \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\beta_i^*\} = -\theta_{xi}^* \{t_{2i}\} + \theta_{yi}^* \{t_{1i}\} \quad (4.88)$$

$U_i, V_i, W_i$  : déplacements du nœuds  $i$  dans le repère global d'axes  $X, Y, Z$  ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ )  
 $\theta_{xi}, \theta_{yi}$  : rotations de la normale au nœud  $i$  autour des axes tangents  $x, y$  ( $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n}$ )

Les éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml (Figure 4.4) possèdent cinq degrés de liberté par nœuds : 3 ddls globaux et deux ddls locaux. La formulation de leurs matrices de rigidité élémentaire sera faite dans un premier temps en se basant sur les cinq ddls. Nous établirons par la suite les matrices globales correspondantes en tenant compte de la transformation des deux rotations locales  $\theta_{xi}, \theta_{yi}$  en trois rotations  $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$  autour des axes  $X, Y, Z$  du repère cartésien global. Les deux éléments auront finalement 6 ddls par nœuds.

#### 4.6.4. Expression des champs de déformation en version simplifiée

Nous rappelons que la version simplifiée des déformations est celle qui consiste à définir des approximations linéaire en  $\zeta$  pour  $\{\epsilon_s\}$  et constante en  $\zeta$  pour  $\{\gamma_s\}$ .

##### 4.6.4.1. Champ de déformations associé à la membrane et à la flexion

$$\{\epsilon_s\} = \{\epsilon_0\} + \zeta \{\epsilon_1\} \quad (4.89)$$

avec

$$\langle \epsilon_0 \rangle = \langle \epsilon_{x0} \quad \epsilon_{y0} \quad \epsilon_{xy0} \rangle : \text{déformations de membrane} \quad (4.90a)$$

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \langle \epsilon_{x1} \quad \epsilon_{y1} \quad \epsilon_{xy1} \rangle : \text{déformations de flexion} \quad (4.90b)$$

##### a. Déformations de membrane

En appliquant l'approximation (4.87) aux vecteurs des déformations réelles et virtuelles de membrane  $\{\varepsilon_0\}$  et  $\langle \varepsilon_0^* \rangle$ , nous obtenons

$$\{\varepsilon_0\} = [B_0]\{u_n\} \quad ; \quad \langle \varepsilon_0^* \rangle = \langle u_n^* \rangle [B_0]^T \quad (4.91)$$

$$\langle u_n \rangle = \langle U_i \quad V_i \quad W_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \dots \quad i=1 \text{ à } 4 \rangle$$

$$[B_0] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 \\ \langle t_2 \rangle N_{i,y} & 0 & 0 \quad \dots i=1,4 \\ \langle t_1 \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$N_{i,x} = C_{11}N_{i,\xi} + C_{21}N_{i,\eta} \quad ; \quad N_{i,y} = C_{12}N_{i,\xi} + C_{22}N_{i,\eta}$$

$$C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{21} : \text{termes de la matrice } [C_0] \quad (4.34)$$

#### b. Déformations de flexion

Les vecteurs des déformations réelles et virtuelles de flexion  $\{\varepsilon_1\}$  et  $\langle \varepsilon_1^* \rangle$  sont calculés comme pour la membrane à partir des déplacements (équation 4.87)

$$\{\varepsilon_1\} = [B_1]\{u_n\} \quad ; \quad \langle \varepsilon_1^* \rangle = \langle u_n^* \rangle [B_1]^T \quad (4.93a)$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,x} & \frac{h}{2} \langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,x} \\ \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,y} & \frac{h}{2} \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,y} & i=1 \text{ à } 4 \\ \langle t_1 \rangle \bar{N}_{i,y} + \langle t_2 \rangle \bar{N}_{i,x} & \frac{h}{2} (\langle \bar{t}_{1i} \rangle N_{i,y} + \langle \bar{t}_{2i} \rangle N_{i,x}) \end{bmatrix} \quad (4.93b)$$

$$\bar{N}_{i,x} = bc_{11}N_{i,\xi} + bc_{21}N_{i,\eta}, \quad \bar{N}_{i,y} = bc_{12}N_{i,\xi} + bc_{22}N_{i,\eta}$$

$$\langle \bar{t}_{1i} \rangle = \langle -\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_{2i} \quad \bar{t}_1 \cdot \bar{t}_{1i} \rangle \quad ; \quad \langle \bar{t}_{2i} \rangle = \langle -\bar{t}_2 \cdot \bar{t}_{2i} \quad \bar{t}_2 \cdot \bar{t}_{1i} \rangle$$

$$bc_{11}, bc_{12}, bc_{21}, bc_{22} : \text{termes de la matrice } [b_c] \text{ equ(4.35)}$$

#### 4.6.4.2 Déformations de cisaillement transversal $\{\gamma_0\}$

Dans la plupart des modèles mixtes classiques, le verrouillage en CT provenait essentiellement de la définition numérique des déformations de CT  $\{\gamma_0\}$  (équations 4.94, 4.

95). Ce problème numérique est la conséquence d'une approximation bilinéaire des variables cinématiques (déplacements  $\bar{u}_p$  et rotations  $\bar{\beta}$ ), utilisée pour évaluer les déformations de CT. Certes, une intégration réduite de la matrice de rigidité correspondante de CT contribue à l'élimination du verrouillage, mais avec pour conséquences :

- L'apparition de modes parasites (faux mécanismes d'énergie nulle), qui peuvent ne pas disparaître même après assemblage de plusieurs éléments
- Une sensibilité des éléments finis aux distorsions géométriques.

Pour éviter ces deux problèmes numériques, nous avons adopté, dans le cas des modèles HMiSP4/ml/Q4 et NHMiSP4/ml, la technique des déformations de CT de substitution (Méthode ANS : Assumed Natural Strain) proposée par Bathe et al [54,55].

Les équations (4.94) et (4.95) font apparaître les composantes cartésiennes locales du vecteur  $\{\gamma_0\}$  dans le repère tangent  $[Q]$ . La méthode ANS est naturelle ; il est plus judicieux, dans un contexte de formulation isoparamétrique courbe, de l'appliquer aux déformations naturelles ou covariantes  $\gamma_{\xi\xi}$  et  $\gamma_{\eta\xi}$ . La matrice  $[C_0]$  (4.34) assure le lien entre  $\{\gamma_0\}$  et les déformations covariantes correspondantes :

$$\{\gamma_0\} = [C_0]^T \{\gamma_\zeta\} \quad ; \quad \langle \gamma_0^* \rangle = \langle \gamma_\zeta^* \rangle [C_0] \quad (4.94)$$

avec

$$\{\gamma_\zeta\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi\xi} \\ \gamma_{\eta\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{n} \cdot \bar{u}_{p,\xi} + \bar{a}_1 \cdot \bar{\beta} \\ \bar{n} \cdot \bar{u}_{p,\eta} + \bar{a}_2 \cdot \bar{\beta} \end{Bmatrix} \quad (4.95)$$

Les déformations naturelles  $\{\gamma_\zeta\}$  sont définies dans un premier temps en fonction des déformations  $\gamma_{\zeta k}$  calculées aux milieux des côtés de l'élément (Figure 4.4) :

$$\{\gamma_\zeta\} = [A] \{\gamma_{\zeta k}\} \quad ; \quad [A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

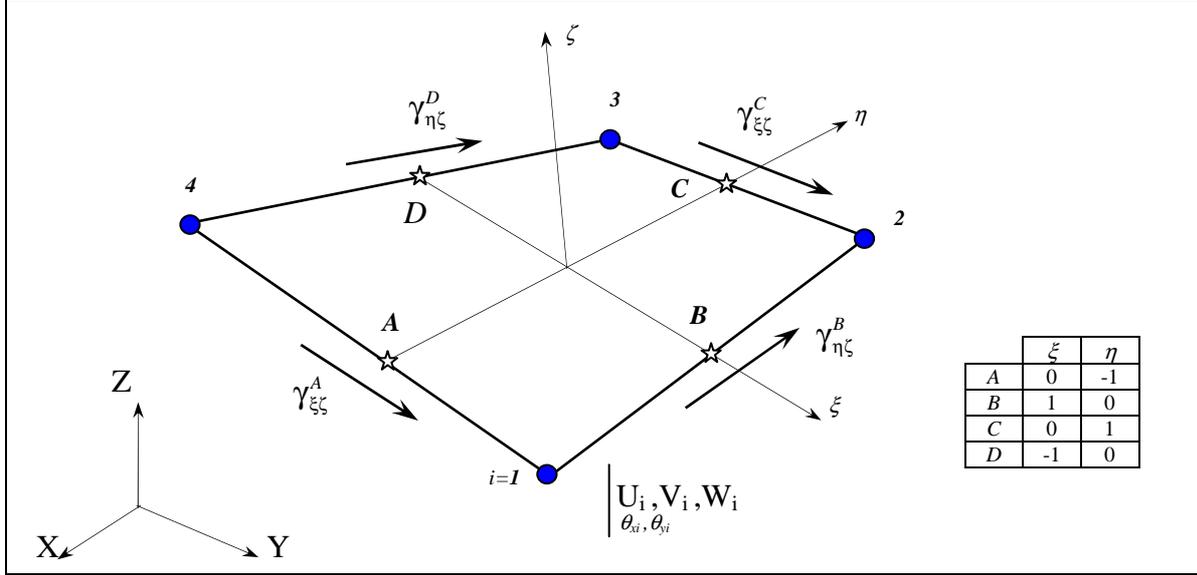
$$\langle \gamma_{\zeta k} \rangle = \langle \gamma_{\xi\xi}^A \quad \gamma_{\eta\xi}^B \quad \gamma_{\xi\xi}^C \quad \gamma_{\eta\xi}^D \rangle \quad (4.97)$$

Les déformations naturelles de bord  $\langle \gamma_{\zeta k} \rangle$  sont imposées comme constantes sur les côtés de l'élément. Il s'agit là d'une des subtilités de la méthode ANS, elle évite la linéarité de ses déformations sur les cotés qui, rappelons le, est responsable du verrouillage en CT si une intégration exacte 2\*2 PG est utilisée pour le calcul de l'énergie de CT. La méthode ANS consiste simplement à introduire une hypothèse dite de Mindlin sous forme discrète. Il s'agit en fait d'une généralisation des éléments de coques minces sans CT utilisant l'approche connue sous le nom des hypothèses discrètes de Kirchhoff. Nous avons choisi de projeter

$\langle \gamma_{\zeta k} \rangle$  (4.96) sur les variables nodales en utilisant une technique de collocation par points.

Ainsi, ses déformations naturelles et discrètes sont (voir figure 4.4) :

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\zeta}^A \text{ (respec. } \gamma_{\xi\zeta}^C) &= \bar{n} \cdot \bar{u}_{p,\xi} + \bar{a}_1 \cdot \bar{\beta} \text{ au point A (respec. C)} \\ \gamma_{\eta\zeta}^D \text{ (respec. } \gamma_{\eta\zeta}^B) &= \bar{n} \cdot \bar{u}_{p,\eta} + \bar{a}_2 \cdot \bar{\beta} \text{ au point D (respec. B)} \end{aligned} \quad (4.98)$$



**Figure 4.4.** Déformations naturelles de CT projetées sur les côtés

Nous obtenons,

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\zeta}^A &= \bar{n}^A \cdot \bar{u}_{p,\xi}^A - \bar{a}_1^A \cdot \bar{t}_2^A \theta_x^A + \bar{a}_1^A \cdot \bar{t}_1^A \theta_y^A \\ \gamma_{\eta\zeta}^B &= \bar{n}^B \cdot \bar{u}_{p,\eta}^B - \bar{a}_2^B \cdot \bar{t}_2^B \theta_x^B + \bar{a}_2^B \cdot \bar{t}_1^B \theta_y^B \\ \gamma_{\xi\zeta}^C &= \bar{n}^C \cdot \bar{u}_{p,\xi}^C - \bar{a}_1^C \cdot \bar{t}_2^C \theta_x^C + \bar{a}_1^C \cdot \bar{t}_1^C \theta_y^C \\ \gamma_{\eta\zeta}^D &= \bar{n}^D \cdot \bar{u}_{p,\eta}^D - \bar{a}_2^D \cdot \bar{t}_2^D \theta_x^D + \bar{a}_2^D \cdot \bar{t}_1^D \theta_y^D \end{aligned} \quad (4.99)$$

$\bar{n}^k$  ( $k=A,B,C$  ou  $D$ ) sont les normales aux points milieux des cotés A,B,C et D. Elles sont données par :

$$\bar{n}^k = \frac{\bar{n}^k}{|\bar{n}^k|} \quad ; \quad \bar{n}^k = \frac{1}{2}(\bar{n}_i + \bar{n}_j) \quad (4.100)$$

$k(\xi,\eta)$	A(0,-1)	B(1,0)	C(0,1)	D(-1,0)
nœud $i$	4	1	2	3
nœud $j$	1	2	3	4

Nous aboutissons à la représentation sous forme matricielle suivante du vecteur  $\{\gamma_{\zeta k}\}$  (4.97) :

$$\{\gamma_{\zeta k}\} = [B_{c\zeta}] \{u_n\} \quad (4.101)$$

$$[B_{c\zeta}] = \begin{bmatrix} -\langle \bar{n}^A \rangle & \langle -\bar{a}_1^A \bullet \bar{t}_2^{(1)} & \bar{a}_1^A \bullet \bar{t}_1^{(1)} \rangle & \langle \bar{n}^A \rangle & \langle -\bar{a}_1^A \bullet \bar{t}_2^{(2)} & \bar{a}_1^A \bullet \bar{t}_1^{(2)} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & -\langle \bar{n}^B \rangle & \langle -\bar{a}_2^B \bullet \bar{t}_2^{(2)} & \bar{a}_2^B \bullet \bar{t}_1^{(2)} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\langle \bar{n}^D \rangle & \langle -\bar{a}_2^D \bullet \bar{t}_2^{(1)} & \bar{a}_2^D \bullet \bar{t}_1^{(1)} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle \bar{n}^B \rangle & \langle -\bar{a}_2^B \bullet \bar{t}_2^{(3)} & \bar{a}_2^B \bullet \bar{t}_1^{(3)} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \langle \bar{n}^C \rangle & \langle -\bar{a}_1^C \bullet \bar{t}_2^{(3)} & \bar{a}_1^C \bullet \bar{t}_1^{(3)} \rangle & -\langle \bar{n}^C \rangle & \langle -\bar{a}_1^C \bullet \bar{t}_2^{(4)} & \bar{a}_1^C \bullet \bar{t}_1^{(4)} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \langle \bar{n}^D \rangle & \langle -\bar{a}_2^D \bullet \bar{t}_2^{(4)} & \bar{a}_2^D \bullet \bar{t}_1^{(4)} \rangle \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

L'expression finale du vecteur des déformations de CT  $\{\gamma_0\}$  (4.94) sera donc

$$\{\gamma_0\} = [B_c] \{u_n\} \quad ; \quad [B_c] = [C_0]^T [A] [B_{c\zeta}] \quad (4.103)$$

La matrice  $[B_c]$ , de dimension 2x20, fait intervenir toutes les variables nodales.

#### 4.6.5. Matrice de rigidité élémentaire mixte-hybride

L'expression finale du travail virtuel interne élémentaire  $W_{int}^e$  (4.72) s'écrit en considérant toutes les approximations des contraintes (équations 4.84,4.85) et des déformations (équations 4.91,4.93a,4.103) :

En injectant les expressions (4.84),(4.85),(4.91),(4.93) et (4.103) dans les équations (4.80), (4.81),(4.82), nous aboutissons aux expressions des matrices de rigidité multicouches mixtes, pour le cas général où la structure stratifiée à étudier est non-symétrique :

##### 4.6.5.1. Matrice de rigidité de l'élément HMISP4/ml/Q4 (membrane en déplacement, flexion/CT mixte-hybride)

Dans le cas d'une stratification non-symétrique, l'expression finale du travail virtuel interne élémentaire  $W_{int}^e$  (4.73) pour le modèle HMISP4/ml/Q4 s'écrit:

$$W_{int}^e = \langle \langle \alpha_f^* \rangle \rangle \langle u_n^* \rangle \begin{bmatrix} -[k_1] & [k_{1u}] \\ [k_{1u}]^T & [k_0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_f\} \\ \{u_n\} \end{Bmatrix} \quad (4.104)$$

Avec ; 
$$[k_0] = \int_A [B_0]^T [H_m] [B_0] dA + \int_A ([B_1]^T [H_{mf}] [B_0] + [B_0]^T [H_{mf}] [B_1]) dA \quad (4.105)$$

$$[k_l] = -\frac{h^4}{36} \int_A [P_l]^T [\bar{H}_f] [P_l] dA - \frac{h^2}{16} \int_A [P_\tau]^T [\bar{H}_c] [P_\tau] dA \quad (4.106)$$

$$[k_{lu}] = \int_A \left( \frac{h^2}{6} [P_\tau]^T [B_c] + \frac{h}{3} [P_l]^T [B_l] \right) dA \quad (4.107)$$

$[H_m]$  et  $[H_{mf}]$  sont respectivement les matrices de comportement en membrane et de couplage membrane-flexion. Leurs expressions respectives sont classiquement données par la théorie des stratifications (équations 4.83).

Les matrices de comportement en flexion/CT  $[\bar{H}_f]$  et  $[\bar{H}_c]$  ne s'identifient plus à leurs expressions classiques associées aux modèles déplacements (2.24b) et (2.24d). Elles sont associées à des modèles mixtes-hybrides et sont déterminées en suivant la même procédure que pour le modèle de plaque MiSP4/ml (chapitre 2, sections 2.2.3.1 et 2.2.32). Elles s'écrivent ainsi :

$$[\bar{H}_f] = \sum_{i=1}^{nc} \left( \frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3} [H]_i \right)^{-1} \quad (\text{équation 2.64})$$

$$[\bar{H}_c] = \sum_{i=1}^{nc} \left[ (z_{i+1} - z_i) + \frac{16}{5h^4} (z_{i+1}^5 - z_i^5) - \frac{8}{3h^2} (z_{i+1}^3 - z_i^3) \right] [G]_i^{-1} \quad (\text{équation 2.66})$$

Remarque :

L'écriture précédente de la matrice  $[\bar{H}_c]$  présente un grand avantage, à savoir son indépendance vis-à-vis des facteurs de corrections de CT. Elle ne les fait plus apparaître comme c'est souvent le cas pour les modèles déplacements du premier ordre.

La condensation statique des paramètres  $\{\alpha_f\}$  au niveau élémentaire se traduit par

$$\{\alpha_f\} = [k_l]^{-1} [k_{lu}] \{u_n\} \quad (4.108)$$

$$[k^e] = [k_0] - [k_{lu}]^T [k_l]^{-1} [k_{lu}] \quad (\text{dimension } 20 \times 20) \quad (4.109)$$

où  $[k_e]$  est la matrice de rigidité de l'élément HMiSP4/Q4/ml. 2x2 points de gauss suffisent pour l'intégration exacte de l'ensemble des matrices.

*4.6.5.2. Matrice de rigidité de l'élément NHMISP4/ml (membrane hybride naturelle, flexion/CT mixte-hybride)*

Dans le cas d'une stratification non-symétrique, l'expression finale du travail virtuel interne élémentaire  $W_{int}^e$  (4.72) s'écrit:

$$W_{int}^e = \langle \langle \alpha_m^* \rangle \rangle \langle \alpha_f^* \rangle \langle u_n^* \rangle \begin{bmatrix} -[k_{mm}] & [k_{mf}] & [k_{mu}] \\ [k_{mf}]^T & [k_f] & [k_{fu}] \\ [k_{mu}]^T & [k_{fu}]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_m\} \\ \{\alpha_f\} \\ \{u_n\} \end{Bmatrix} \quad (4.110)$$

Avec ;

$$[k_{mm}] = \int_A [P_0]^T [\bar{H}_m] [P_0] dA \quad ; \quad [k_{mu}] = h \int_A [P_0]^T [B_0] dA \quad ; \quad [\bar{H}_m] = \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1} - z_i) [H]_i^{-1} \quad (4.111)$$

$$[k_f] = -\frac{h^4}{36} \int_A [P_l]^T [\bar{H}_f] [P_l] dA - \frac{h^2}{16} \int_A [P_\tau]^T [\bar{H}_c] [P_\tau] dA \quad ; \quad [\bar{H}_f] (2.64) \text{ et } [\bar{H}_c] (2.66) \quad (4.112)$$

$$[k_{fu}] = \int_A \left( \frac{h^2}{6} [P_\tau]^T [B_c] + \frac{h}{3} [P_l]^T [B_l] \right) dA \quad (4.113)$$

$$[k_{mf}] = \int_A [P_0]^T [\bar{H}_{mf}] [P_l] dA \quad , \quad [\bar{H}_{mf}] = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{nc} (z_{i+1}^2 - z_i^2) [H]_i^{-1}$$

$[\bar{H}_m], [\bar{H}_f], [\bar{H}_{mf}], [\bar{H}_c]$  sont les matrices de comportement en membrane, flexion, couplage membrane-flexion et CT, adaptées pour être utilisées dans des modèles mixtes-hybrides.

La condensation statique des paramètres  $\{\alpha_m\}$  et  $\{\alpha_f\}$  au niveau élémentaire se traduit par :

$$\{\alpha_m\} = [k_{mm}]^{-1} \left( [k_{mu}] \{u_n\} - [k_{mf}] \{\alpha_f\} \right) \quad , \quad \{\alpha_f\} = [k_f]^{-1} [k_{fu}]^T \{u_n\} \quad (4.114)$$

L'expression finale de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément NHMiSP4/ml non-symétrique s'écrit ainsi

$$[k^e] = [A_1] + [A_2] [A_3]^{-1} [A_2]^T \quad (4.115)$$

Avec ; 
$$[A_1] = [k_{fu}]^T + [k_{mu}]^T [k_{mm}]^{-1} [k_{mu}] \quad (4.116)$$

$$[A_2] = [k_{mu}]^T [k_{mm}]^{-1} [k_{mf}] \quad ; \quad [A_3] = [k_{mf}]^T [k_{mm}]^{-1} [k_{mf}] \quad (4.117)$$

Un schéma à 2x2 points de gauss est utilisé pour l'intégration exacte de l'ensemble des matrices.

#### Remarque :

Dans le cas d'une stratification symétrique, il suffit de poser  $[\bar{H}_{mf}] = 0$  et les deux modèles peuvent être en conséquence utilisés.

#### 4.6.6. Matrice de rigidité fictive

Le passage de 5 ddl à 6 ddl par nœud conduit à une singularité de la matrice de rigidité globale si tous les éléments connectés à un nœud sont coplanaires. Pour éviter cette difficulté numérique, nous introduisons une matrice  $[k_{\theta}]$  fictive associée aux quatre rotations

nodales fictives  $\theta_{zi}$ . Nous avons adopté pour cela la technique proposée par Batoz et Dhatt [69]. Elle est basée sur la discrétisation d'une forme intégrale  $W_{\theta_z}^e$  fictive associée à l'opérateur Laplacien de  $\theta_z$  pondérée par  $\theta_z^*$  :

$$W_{\theta_z}^e = \int \alpha H_{f1} (\theta_{z,x}^* \theta_{z,x} + \theta_{z,y}^* \theta_{z,y}) dA \quad (4.118)$$

$$\text{avec } \theta_z = \sum_{i=1,4} N_i \theta_{zi} \text{ (bilinéaire)} ; \begin{Bmatrix} \theta_{z,x} \\ \theta_{z,y} \end{Bmatrix} = [N_{\theta_z}] \{\theta_{z_n}\} ; [N_{\theta_z}] = [C_0]^T \begin{Bmatrix} \langle N_{,\xi} \rangle \\ \langle N_{,\eta} \rangle \end{Bmatrix} \quad (4.119)$$

En effectuant les mêmes développements sur les termes virtuels, nous obtenons :

$$W_{\theta_z}^e = \langle \theta_{z_n}^* \rangle [k_{\theta_z}^e] \{\theta_{z_n}\} ; [k_{\theta_z}^e] = \alpha H_{f1} \int_{A^e} [N_{\theta_z}]^T [N_{\theta_z}] dA \quad (4.120)$$

$H_{f1}$  est une valeur caractéristique associée à une rigidité de flexion (par exemple  $Eh^3/12(1-\nu^2)$ ).  $\alpha$  est un coefficient petit ( $10^{-7}$  à  $10^{-4}$ ) dépendant de la précision de l'ordinateur, il peut également être défini en fonction de la géométrie de l'élément [68], en considérant par exemple le rapport du quart de l'aire au carré du plus long côté  $\alpha = A^e/4L_{\max}^2$ . En ajoutant ainsi  $[k_{\theta_z}^e]$  aux matrices de rigidité des deux éléments finis développés  $[k_e]$

(éq. 4.108 pour HMiSP4/Q4/ml et éq. 4.114 pour NHMiSP4/ml), nous évitons la singularité de la matrice globale  $[K]$ .

#### 4.6.7. Passage dans le repère global

Les deux modèles de coques sont formulés avec 5 degrés de liberté par nœuds : les déplacements  $U, V, W$  dans le repère cartésien global d'axes  $X, Y, Z$  et les rotations locales  $\theta_x, \theta_y$  autour des deux vecteurs tangents orthonormés  $\bar{t}_1, \bar{t}_2$ . Le passage aux rotations globales est obtenu aux nœuds en utilisant la relation suivante, définie au nœud  $i$  :

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \bar{t}_{1i} \rangle \\ \langle \bar{t}_{2i} \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{Xi} \\ \theta_{Yi} \\ \theta_{Zi} \end{Bmatrix} \quad (4.121)$$

## 4.7. Calcul des contraintes tridimensionnelles :

### 4.7.1. Cas d'une stratification symétrique

#### 4.7.1.1. Contraintes planes $\{\sigma_s\}$

Le calcul des contraintes 3D est fait en partant d'une formulation en déplacement. Nous introduisons ensuite les moments de flexion  $\{M\}$  et les efforts normaux  $\{N\}$  et de CT  $\{T\}$  définis dans une formulation mixte-hybride.

Partons de l'équation (4.78a) ;

$$\{\sigma_s\} = \{\sigma_0\} + \zeta\{\sigma_1\} \quad , \quad \{\sigma_0\} = [H]\{\varepsilon_0\} \quad \text{et} \quad \{\sigma_1\} = [H]\{\varepsilon_1\}$$

L'expression de  $\{\sigma_s\}$  devient

$$\{\sigma_s\} = [H]\{\varepsilon_0\} + \frac{2z}{h}[H]\{\varepsilon_1\} \quad (4.122)$$

Pour une stratification symétrique, la définition de  $\{M\}$  et  $\{N\}$  conduit à :

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} z(\{\sigma_0\} + \zeta\{\sigma_1\})dz = \frac{2}{h} \left( \sum_{i=1}^{nc} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H]_i \right) \{\varepsilon_1\} \quad ; \quad \{\varepsilon_1\} = \frac{h}{2} [\bar{H}_f] \{M\} \quad (4.123a)$$

et

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} (\{\sigma_0\} + \zeta\{\sigma_1\})dz = [H_m]\{\varepsilon_0\} \quad ; \quad \{\varepsilon_0\} = [H_m]^{-1}\{N\} \quad (4.123b)$$

Une substitution de  $\{M\}$  et  $\{N\}$  dans (4.122) donne

$$\{\sigma_s\} = [H] \left( [H_m]^{-1}\{N\} + z[\bar{H}_f]\{M\} \right) \quad (4.124a)$$

Cad

$$\{\sigma(z)\} = [H(z)] \left( [H_m]^{-1}\{N\} + z[\bar{H}_f]\{M\} \right) \quad ; \quad [\bar{H}_f] \quad (\text{éq.4.83}) \quad (4.124b)$$

Nous écrivons ainsi pour chaque couche :

$$[H(z)] = [T_1^T] [H_L] [T_1] \quad (4.125)$$

$[T_1]$  est la matrice de transformation du repère d'orthotropie au repère global.  $[H_L]$  est matrice de comportement local en flexion .

Nous redéfinissons  $\{N\}$  et  $\{M\}$  intervenant dans l'équation (4.124b) en formulation mixte-hybride :

Efforts normaux :  $\{N\}$

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} (\{\sigma_0\} + \zeta\{\sigma_1\}) dz = h\{\sigma_0\} = h[P_0]\{\alpha_m\} \quad (4.126)$$

$$\{\alpha_m\} = [k_{mm}]^{-1}[k_{mu}]\{u_n\} \quad (\text{éq. 4.114})$$

Moments de flexion:  $\{M\}$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} z\{\sigma_s\} dz = \frac{h^2}{6}\{\sigma_1\} = \frac{h^2}{6}[P_1][k_l]^{-1}[k_{lu}]\{u_n\} \quad (4.127)$$

Ces deux expressions de  $\{N\}$  et  $\{M\}$  sont injectées dans l'équation (4.124b) pour aboutir à la formule permettant d'évaluer les contraintes  $\{\sigma(z)\}$  dans la direction de l'épaisseur.

#### 4.7.1.2. Contraintes de CT $\{\tau_s\}$

Nous définissons les contraintes de CT  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  à partir des équations de l'équilibre tridimensionnel :

$$\tau_{xz} = \int_z^t (\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y}) dz = \int_z^t (\sigma_{x0,x} + \sigma_{xy0,y}) dz + z \int_z^t (\sigma_{x1,x} + \sigma_{xy1,y}) dz = \tau_{0xz} + \tau_{1xz} \quad (4.128)$$

$$\tau_{yz} = \int_z^t (\sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dz = \int_z^t (\sigma_{xy0,x} + \sigma_{y0,y}) dz + z \int_z^t (\sigma_{xy1,x} + \sigma_{y1,y}) dz = \tau_{0yz} + \tau_{1yz} \quad (4.129)$$

où t est la composante en haut d'une couche, z est la composante d'une couche à calculer ;

Nous proposons d'utiliser la notation suivante :

$$\{\tau\} = \{\tau_0\} + \{\tau_1\} \quad (4.130)$$

Expression du vecteur  $\{\tau_0\}$  :

En partant de l'équation  $\{\sigma_0\} = [H][B_0]\{u_n\}$ , nous aboutissons à :

$$\{\tau_0\} = \begin{Bmatrix} \langle H(1,:) \rangle [B_{0,x}]\{u_n\} + \langle H(3,:) \rangle [B_{0,y}]\{u_n\} \\ \langle H(3,:) \rangle [B_{0,x}]\{u_n\} + \langle H(2,:) \rangle [B_{0,y}]\{u_n\} \end{Bmatrix} \quad (4.131)$$

Ou en d'autres termes, si  $\{\sigma_0\} = [H][H_m]^{-1}\{N\}$  avec  $\{N\}$  (éq. 4.125) et si l'on note que  $[A_m(z)] = [H(z)][H_m]^{-1}$  ; nous aboutissons à l'expression suivante du vecteur  $\{\tau_0\}$

$$\{\tau_0\} = \begin{cases} h\langle A_m(1,:) \rangle [P_{0,x}] \{\alpha_m\} + h\langle A_m(3,:) \rangle [P_{0,y}] \{\alpha_m\} \\ h\langle A_m(3,:) \rangle [P_{0,x}] \{\alpha_m\} + h\langle A_m(2,:) \rangle [P_{0,y}] \{\alpha_m\} \end{cases} \quad (4.132)$$

Avec

$$[P_{0,x}] = \frac{I}{c_0^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_{21}C_{22}^2 & C_{11}C_{12}^2 \\ 0 & 0 & 0 & C_{21}^3 & C_{11}^3 \\ 0 & 0 & 0 & -C_{22}C_{21}^2 & -C_{12}C_{11}^2 \end{bmatrix}; [P_{0,y}] = \frac{I}{c_0^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_{22}^3 & C_{12}^3 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22}C_{21}^2 & C_{12}C_{11}^2 \\ 0 & 0 & 0 & -C_{21}C_{22}^2 & -C_{11}C_{12}^2 \end{bmatrix}$$

Expression du vecteur  $\{\tau_1\}$  :

Nous partons également de l'expression des contraintes de flexion :

$$\{\sigma_1\} = [H] \{\varepsilon_1\} = [H] [\bar{H}_f] \{M\} \quad ; \quad \text{Notation : } [A] = [H] [\bar{H}_f] \quad (4.133)$$

Le vecteur des contraintes de CT à travers l'épaisseur  $\{\tau_1\}$  s'écrit

$$\{\tau_1\} = [D_1] \{T\} + [D_2] \{\lambda\} \quad (4.134)$$

tel que :

$$D_1 = \int_{-t}^{\frac{z}{2}} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} dz, \quad D_2 = \int_{-t}^{\frac{z}{2}} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix} dz \quad (4.135)$$

où t : composante définie en bas ou en haut d'une couche , z : composante d'une couche à calculer.

$$\{T\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\tau_s\} dz = \frac{h^2}{6} [P_\tau] [k_l]^{-1} [k_{lu}] \{u_n\} \quad (4.136a)$$

$$\langle \lambda \rangle = \langle M_{x,x} - M_{xy,y} ; M_{xy,x} - M_{y,y} ; M_{y,x} ; M_{x,y} \rangle ; \{\tau_s\} \quad (\text{équations (4.78b)}) \quad (4.136b)$$

$$\begin{cases} M_x = \frac{h^2}{6} (\alpha_1 + \xi\alpha_2 + \alpha_3\eta + \xi\eta\alpha_4) \\ M_y = \frac{h^2}{6} (\alpha_5 + \xi\alpha_6 + \alpha_7\eta + \xi\eta\alpha_8) \\ M_{xy} = \frac{h^2}{6} (\alpha_9 + \xi\alpha_{10} + \eta\alpha_{11} + \xi\eta\alpha_{12}) \end{cases} \quad (4.137)$$

$$\text{Alors} \quad \{\lambda\} = [P_m] \{\alpha_f\} \quad (4.138)$$

où :

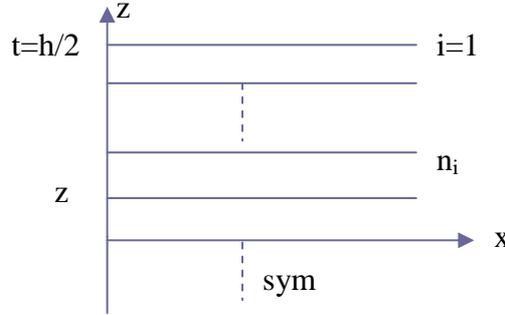
$$P_m = \begin{bmatrix} 0 & C_{11} & C_{21} & \eta C_{11} + \xi C_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{21} & -C_{22} & -(\eta C_{12} + \xi C_{22}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{11} & -C_{22} & -\eta \xi C_{12} + \xi C_{22} & 0 & C_{11} & C_{21} & \eta C_{11} + \xi C_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{21} & \eta C_{11} + \xi C_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{12} & C_{22} & \eta C_{12} + \xi C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

après l'intégration de  $D_1$  et  $D_2$  nous aurons :

$$[D_1] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_i} (t^2 - z^2)_i \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix}_i \quad (4.139)$$

$$[D_2] = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n_i} (t^2 - z^2)_i \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix}_i \quad (4.140)$$

$n_i$  est le numéro de la couche pour laquelle les deux contraintes de CT sont calculées (figure 4.5)



**Figure 4.5.** Une stratification à trois couches

#### 4.7.2. Cas d'une stratification non-symétrique

Rappelons que pour une stratification non-symétrique, la matrice de couplage membrane-flexion  $[H_{mf}]$  ne s'annule pas.

Nous écrivons

$$\{\sigma(z)\} = [H(z)](\{\epsilon_0\} + z\{\epsilon_1\}) \quad (4.141)$$

$$\{\epsilon_1\} = ([H_{mf}]^{-1}[H_f] - [H_m]^{-1}[H_{mf}])^{-1}([H_{mf}]^{-1}\{M\} - [H_m]^{-1}\{N\}) \quad (4.142)$$

$$\{\epsilon_0\} = [H_{mf}]^{-1}\{N\} - [H_m]^{-1}[H_{mf}]\{\epsilon_1\} \quad (4.143)$$

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} (\{\sigma_0\} + \zeta\{\sigma_1\}) dz = \int_{-h/2}^{h/2} [H]\{\epsilon_0\} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2z}{h}\{\sigma_1\} = [H_m]\{\epsilon_0\} \quad (4.144)$$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} z(\{\sigma_0\} + \zeta\{\sigma_1\})dz = [H_{mf}] \{\varepsilon_0\} + \frac{h^2}{6} \{\sigma_1\} \quad (4.145)$$

Nous injectons dans un premier temps les équations (4.142) et (4.143) dans (4.141) ; puis nous calculons pour chaque couche les contraintes  $\sigma(z)$  et  $\tau(z)$  :

Posons pour simplifier :

$$[B^*] = ([H_{mf}]^{-1} [H_f] - [H_m]^{-1} [H_{mf}])^{-1} \quad (4.146)$$

$$[A^*] = [B^*] [H_{mf}]^{-1}, [C] = [B^*] [H_m]^{-1}, [D] = [H_m]^{-1} [H_{mf}] \quad (4.147)$$

Ainsi 
$$\{\varepsilon_0\} = [H_m]^{-1} \{N\} - [D][A^*]\{M\} + [D][C]\{N\} \quad (4.148)$$

$$\{\varepsilon_1\} = [A^*]\{M\} - [C]\{N\} \quad (4.149)$$

et 
$$\{\sigma(z)\} = [P^*]\{N\} + [Q^*]\{M\} \quad (4.150a)$$

$$[P^*] = [H(z)][H_m]^{-1} + [H(z)][D][C] - z[H(z)][C] \quad (4.150b)$$

$$[Q^*] = -[H(z)][D][A^*] + z[H(z)][A^*] \quad (4.150c)$$

Par le biais des équations d'équilibre on déduit :

$$\tau_{xz} = - \int_{-t}^z (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y}) dz = \quad (4.151)$$

$$- \int_{-t}^z (\langle P^*(1,1:3) \rangle \{N_{,x}\} + \langle Q^*(1,1:3) \rangle \{M_{,x}\} + \langle P^*(3,1:3) \rangle \{N_{,y}\} + \langle Q^*(3,1:3) \rangle \{M_{,y}\}) dz$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-t}^z (\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y}) dz = \quad (4.152)$$

$$- \int_{-t}^z (\langle P^*(2,1:3) \rangle \{N_{,y}\} + \langle Q^*(2,1:3) \rangle \{M_{,y}\} + \langle P^*(3,1:3) \rangle \{N_{,x}\} + \langle Q^*(3,1:3) \rangle \{M_{,x}\}) dz$$

Avec ;

$$\int_{-t}^z [P^*] dz = \int_{-t}^z ([H(z)][H_m]^{-1} + [H(z)][D][C] - z[H(z)][C]) dz = \quad (4.153)$$

$$[H(z)] \left( [H_m]^{-1} (z+t) + [D][C](z+t) - \frac{(z^2 - t^2)}{2} [C] \right)$$

$$\int_{-t}^z [Q^*] dz = - \int_{-t}^z ([H(z)][D][A^*] + z[H(z)][A^*]) dz = -[H(z)] \left( [D][A^*](z+t) - \frac{(z^2 - t^2)}{2} [A^*] \right) \quad (4.154)$$

Calcul des dérivés des efforts normaux  $\{N_{,x}\}$  et  $\{N_{,y}\}$  :

\* calcul de  $\{N_{,x}\}$

$\{N\} = [H_m]\{\varepsilon_0\}$ ,  $\{\varepsilon_0\} = [B_0]\{u_n\}$ ,  $\{N_{,x}\} = [H_m][B_{0,x}]\{u_n\}$  alors

$$\{\varepsilon_{0,x}\} = [B_{0,x}]\{u_n\} \quad (4.155a)$$

$$[B_{0,x}] = \begin{bmatrix} \langle t_{1,x} \rangle N_{i,x} + \langle t_1 \rangle N_{i,xx} & 0 & 0 \\ \langle t_{2,x} \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,yx} & 0 & 0 \quad \dots i=1,4 \\ \langle t_{1,x} \rangle N_{i,y} + \langle t_1 \rangle N_{i,yx} + \langle t_{2,x} \rangle N_{i,x} + \langle t_2 \rangle N_{i,xx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.155b)$$

les dérivées d'ordre 2 des fonctions de formes s'écrivent :

$$N_{i,xx} = C_{11}N_{i,x\xi} + C_{21}N_{i,x\eta} = C_{11}C_{21}N_{i,\eta\xi} + C_{21}C_{11}N_{i,\xi\eta} = C_{11}C_{21}\frac{\xi_i\eta_i}{2} \quad (4.156a)$$

$$N_{i,yy} = C_{12}C_{22}\frac{\xi_i\eta_i}{2} \quad (4.156b)$$

$$N_{i,xy} = C_{12}C_{21}N_{i,\eta\xi} + C_{22}C_{11}N_{i,\xi\eta} = (C_{12}C_{21} + C_{22}C_{11})\frac{\xi_i\eta_i}{4} \quad (4.156c)$$

et

$$\vec{t}_1 = \begin{bmatrix} n_z + An_y^2 \\ -An_y n_x \\ -n_x \end{bmatrix}; \vec{t}_2 = \begin{bmatrix} -A(n_y n_x) \\ n_z + An_y^2 \\ -n_y \end{bmatrix} \quad (4.157a)$$

$$\vec{t}_{1,x} = \begin{bmatrix} n_{z,x} + A_{,x}n_y^2 + 2n_y n_{y,x} A \\ -A_{,x}n_y n_x - An_y n_{x,x} - An_x n_{y,x} \\ -n_{x,x} \end{bmatrix}, \vec{t}_{2,x} = \begin{bmatrix} -A_{,x}n_x n_y - n_y n_{x,x} A - An_x n_{y,x} \\ n_{z,x} + A_{,x}n_y^2 + 2An_y n_{y,x} \\ -n_{y,x} \end{bmatrix} \quad (4.157b)$$

avec ;  $A = \frac{l}{l+n_z}$ ,  $A_{,x} = \frac{-n_{z,x}}{(l+n_z)^2}$  (4.157c)

Calculons les dérivés du vecteur normale  $\vec{n}$  :

Une interpolation simple du vecteur  $\vec{n}$  peut-être donnée par

$$\vec{n} = \sum_{i=1}^n N_i \vec{n}_i \quad (4.158)$$

Ainsi

$$\vec{n}_{,\xi} = \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} \vec{n}_i, \quad \vec{n}_{,\eta} = \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} \vec{n}_i, \quad \vec{n}_{,x} = C_{11} \vec{n}_{,\xi} + C_{21} \vec{n}_{,\eta}, \quad \vec{n}_{,y} = C_{12} \vec{n}_{,\xi} + C_{22} \vec{n}_{,\eta} \quad (4.159)$$

\* calcul de  $\{N_{,y}\}$

$$\{N\} = [H_m] \{\mathcal{E}_0\}, \quad \{\mathcal{E}_0\} = [B_0] \{u_n\}, \quad \{N_{,y}\} = [H_m] [B_{0,y}] \{u_n\} \quad (4.160)$$

$$\{\mathcal{E}_{0,y}\} = [B_{0,y}] \{u_n\} \quad (4.161a)$$

$$[B_{0,y}] = \begin{bmatrix} \langle t_{1,y} \rangle N_{i,x} + \langle t_1 \rangle N_{i,xy} & 0 & 0 \\ \langle t_{2,y} \rangle N_{i,y} + \langle t_2 \rangle N_{i,yy} & 0 & 0 \quad \dots i = 1,4 \\ \langle t_{1,y} \rangle N_{i,y} + \langle t_1 \rangle N_{i,yy} + \langle t_{2,y} \rangle N_{i,x} + \langle t_2 \rangle N_{i,xy} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.161b)$$

Avec ;

$$\vec{t}_{1,y} = \begin{bmatrix} n_{z,y} + A_{,y} n_y^2 + 2n_y n_{y,y} A \\ -A_{,y} n_y n_x - A n_y n_{x,y} - A n_x n_{y,y} \\ -n_{x,y} \end{bmatrix}, \quad \vec{t}_{2,y} = \begin{bmatrix} -A_{,y} n_x n_y - n_y n_{x,y} A - A n_x n_{y,y} \\ n_{z,y} + A_{,y} n_y^2 + 2A n_y n_{y,y} \\ -n_{y,y} \end{bmatrix} \quad (4.162)$$

$$A = \frac{1}{1+n_z}, \quad A_{,y} = \frac{-n_{z,y}}{(1+n_z)^2}$$

Nous injectons  $\vec{n}_{,x}$  et  $\vec{n}_{,y}$  (4.159) et (4.158) dans les équations (4.162), afin de calculer les vecteurs tangents dérivés  $\vec{t}_{1,x}, \vec{t}_{1,y}, \vec{t}_{2,x}, \vec{t}_{2,y}$ . Les dérivés de premier ordre des fonctions de formes sont définies par :

$$N_{1,\xi} = \frac{\xi_i}{4} (1 + \eta \eta_i), \quad N_{1,\eta} = \frac{\eta_i}{4} (1 + \xi \xi_i) \quad (4.163)$$

En remplaçant les expressions de  $N_{i,xx}, N_{i,yy}, N_{i,xy}$  (4.156) et de  $\langle t_{1,x} \rangle, \langle t_{2,x} \rangle, \langle t_{1,y} \rangle, \langle t_{2,y} \rangle$  (équations 4.162) par leurs expressions (fonctions de  $\xi, \eta$ ) dans celles de  $[B_{0,x}]$  et de  $[B_{0,y}]$ , nous aboutissons aux expressions finales des dérivés des efforts normaux  $N_{,x}$  et  $N_{,y}$ .

Calcul des dérivés des moments de flexion  $\{M_{,x}\}$  et  $\{M_{,y}\}$  :

Les vecteurs  $\{M_{,x}\}$  et  $\{M_{,y}\}$  sont définis par :

$$\{M_{,x}\} = [H_{mf}] \{\varepsilon_{0,x}\} + \frac{h^2}{6} \{\sigma_{1,x}\} ; \quad \{M_{,y}\} = [H_{mf}] \{\varepsilon_{0,y}\} + \frac{h^2}{6} \{\sigma_{1,y}\} \quad (4.164)$$

$$\{\sigma_1\} = [P_1] \{\alpha_f\}$$

$$\{\sigma_{1,x}\} = C_{11} \{\sigma_{1,\xi}\} + C_{21} \{\sigma_{1,\eta}\} ; \quad \{\sigma_{1,y}\} = C_{12} \{\sigma_{1,\xi}\} + C_{22} \{\sigma_{1,\eta}\} \quad (4.165)$$

Avec

$$\{\sigma_{1,x}\} = [P_{1,x}] \{\alpha_f\} \quad (4.166a)$$

$$[P_{1,x}] = \begin{bmatrix} 0 & C_{11} & C_{21} & \eta C_{11} + \xi C_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{21} & \eta C_{11} + \xi C_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & C_{21} & \eta C_{11} + \xi C_{21} \end{bmatrix} \quad (4.166b)$$

et

$$\{\sigma_{1,y}\} = [P_{1,y}] \{\alpha_f\} \quad (4.167a)$$

$$[P_{1,y}] = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & C_{22} & \eta C_{12} + \xi C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12} & C_{22} & \eta C_{12} + \xi C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{12} & C_{22} & \eta C_{12} + \xi C_{22} \end{bmatrix} \quad (4.167b)$$

En remplaçant les vecteurs  $\{\varepsilon_{0,x}\}, \{\varepsilon_{0,y}\}$  (équations 4.155 et 4.161) et  $\{\sigma_{1,x}\}, \{\sigma_{1,y}\}$  (équations 4.166 et 4.167) par leurs expressions dans les équations (4.164), nous aboutissons aux expressions finales des dérivés des moments de flexion  $\{M_{,x}\}$  et  $\{M_{,y}\}$ .

#### 4.8. Formulation de la matrice masse cohérente

Nous partons de l'expression suivante de l'énergie cinétique

$$V = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dV \quad (4.168)$$

$\rho$  : est la masse volumique du matériau composite. Il est défini pour chacune de couches.

Considérons l'équation (4.37) que l'on réécrit comme suit :

$$\vec{u}_q = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k} + z(-\theta_x\vec{i}_2 + \theta_y\vec{i}_1) \quad (4.169a)$$

$$\begin{cases} u_q = U + z \left( - \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} t_{2i}(1) + \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} t_{1i}(1) \right) = U + z \theta_r(1) \\ v_q = V + z \left( - \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} t_{2i}(2) + \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} t_{1i}(2) \right) = V + z \theta_r(2) \\ w_q = W + z \left( - \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} t_{2i}(3) + \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} t_{1i}(3) \right) = W + z \theta_r(3) \end{cases} \quad (4.169b,c,d)$$

En remplaçant les champs de déplacement (4.169) dans (4.168), nous obtenons :

$$\begin{aligned} V = \int_v \left( \frac{1}{2} \rho (\dot{U}\dot{U} + \dot{V}\dot{V} + \dot{W}^2) + \frac{1}{2} \rho z (2\dot{U}\dot{\theta}_r(1) + 2\dot{V}\dot{\theta}_r(2) + 2\dot{W}\dot{\theta}_r(3)) \right) dV \\ + \int_v \frac{1}{2} \rho z^2 (\dot{\theta}_r^2(1) + \dot{\theta}_r^2(2) + \dot{\theta}_r^2(3)) dV \end{aligned} \quad (4.170)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{U} = \langle N_u \rangle \{ \dot{u}_n \} ; \quad \dot{V} = \langle N_v \rangle \{ \dot{u}_n \} ; \quad \dot{W} = \langle N_w \rangle \{ \dot{u}_n \} \\ \dot{\theta}_r(1) = \langle N_{r_1} \rangle \{ \dot{u}_n \} ; \quad \dot{\theta}_r(2) = \langle N_{r_2} \rangle \{ \dot{u}_n \} ; \quad \dot{\theta}_r(3) = \langle N_{r_3} \rangle \{ \dot{u}_n \} \end{aligned} \quad (4.171)$$

$$\begin{cases} \langle N_u \rangle = \langle N_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ N_i \ \dots \rangle \\ \langle N_v \rangle = \langle 0 \ N_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ N_i \ \dots \rangle \{ \dot{u}_n \} \\ \langle N_w \rangle = \langle 0 \ 0 \ N_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ N_i \ \dots \rangle \{ \dot{u}_n \} \\ \langle N_{r_1} \rangle = \langle 0 \ 0 \ 0 \ -N_1 t_{2i}(1) \ N_1 t_{1i}(1) \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ -N_i t_{2i}(1) \ N_i t_{1i}(1) \ \dots \rangle \\ \langle N_{r_2} \rangle = \langle 0 \ 0 \ 0 \ -N_1 t_{2i}(2) \ N_1 t_{1i}(2) \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ -N_i t_{2i}(2) \ N_i t_{1i}(2) \ \dots \rangle \\ \langle N_{r_3} \rangle = \langle 0 \ 0 \ 0 \ -N_1 t_{2i}(3) \ N_1 t_{1i}(3) \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ -N_i t_{2i}(3) \ N_i t_{1i}(3) \ \dots \rangle \end{cases} \quad (4.172)$$

Après avoir développé les expressions suivantes :

$$\dot{U}\dot{U} + \dot{V}\dot{V} + \dot{W}\dot{W} = \langle u_n \rangle \{ \langle N_u \rangle \langle N_u \rangle + \langle N_v \rangle \langle N_v \rangle + \langle N_w \rangle \langle N_w \rangle \} \{ u_n \} \quad (4.173)$$

$$2\dot{U}\dot{\theta}_r(1) + 2\dot{V}\dot{\theta}_r(2) + 2\dot{W}\dot{\theta}_r(3) = \langle u_n \rangle \{ 2\langle N_u \rangle \langle N_{r_1} \rangle + 2\langle N_v \rangle \langle N_{r_2} \rangle + 2\langle N_w \rangle \langle N_{r_3} \rangle \} \{ u_n \} \quad (4.174)$$

$$\dot{\theta}_r^2(1) + \dot{\theta}_r^2(2) + \dot{\theta}_r^2(3) = \langle u_n \rangle \{ \langle N_{r_1} \rangle \langle N_{r_1} \rangle + \langle N_{r_2} \rangle \langle N_{r_2} \rangle + \langle N_{r_3} \rangle \langle N_{r_3} \rangle \} \{ u_n \} \quad (4.175)$$

$$\begin{aligned} V = c1.(\dot{U}\dot{U} + \dot{V}\dot{V} + \dot{W}\dot{W}) + c2.(2\dot{U}\dot{\theta}_r(1) + 2\dot{V}\dot{\theta}_r(2) + 2\dot{W}\dot{\theta}_r(3)) \\ + c3.(\dot{\theta}_r^2(1) + \dot{\theta}_r^2(2) + \dot{\theta}_r^2(3)) \end{aligned} \quad (4.176)$$

$$V = \langle u_n \rangle \left( \begin{array}{l} c_1 (\{u\} \langle N_u \rangle + \{N_v\} \langle N_v \rangle + \{N_w\} \langle N_w \rangle) + \\ c_2 (2\{N_u\} \langle N_{r1} \rangle + 2\{N_v\} \langle N_{r2} \rangle + 2\{N_w\} \langle N_{r3} \rangle) + \\ c_3 (\{N_{r1}\} \langle N_{r1} \rangle + \{N_{r2}\} \langle N_{r2} \rangle + \{N_{r3}\} \langle N_{r3} \rangle) \end{array} \right) \{u_n\} \quad (4.177)$$

Nous aboutissons finalement à la matrice masse cohérente pour nos deux modèles mixtes-hybrides de coque multicouches proposés :

$$[M] = \left[ \begin{array}{l} c_1 (\{N_u\} \langle N_u \rangle + \{N_v\} \langle N_v \rangle + \{N_w\} \langle N_w \rangle) + \\ c_2 (2\{N_u\} \langle N_{r1} \rangle + 2\{N_v\} \langle N_{r2} \rangle + 2\{N_w\} \langle N_{r3} \rangle) + \\ c_3 (\{N_{r1}\} \langle N_{r1} \rangle + \{N_{r2}\} \langle N_{r2} \rangle + \{N_{r3}\} \langle N_{r3} \rangle) \end{array} \right] \quad (4.178)$$

Où  $c_1 = \sum_{i=1}^n \rho_i (z_i - z_{i+1})$  ;  $c_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i (z_i^2 - z_{i+1}^2)$  ;  $c_3 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \rho_i (z_i^3 - z_{i+1}^3)$  (4.179)

## Chapitre 5

### Validation numérique des modèles de coques multicouches

#### 5.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous examinons les performances de convergence et de précision des éléments de coque quadrilatéraux courbes NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml.

L'étude de la stabilité a été effectuée en examinant l'aptitude d'un élément ou d'un assemblage tridimensionnel d'éléments à représenter les six états de déformation ou d'énergie nulle, correspondant aux six mouvements de corps rigides d'une coque (3 translations et 3 rotations). La vérification de la cohérence des approximations utilisées pour les déplacements et les contraintes dans la solution éléments finis doit se traduire par la convergence vers la solution exacte en augmentant le nombre d'éléments. Un certain nombre de cas-tests standards est utilisé pour évaluer la vitesse de convergence en fonction du nombre d'éléments. Ces tests sont considérés par les ingénieurs comme outils importants de validation des éléments de coque [71]. Ils ont pour but de vérifier la capacité d'un élément de coque à simuler des comportements complexes où les états de membrane ou de flexion sont dominants. Les résultats de nos éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml seront comparés à ceux des éléments de la famille Q4γ24 [69].

Des tests de vibrations libres de coques composites multicouches ont également été effectués. Nous présenterons les principaux résultats.

#### 5.2. Examen des modes rigides

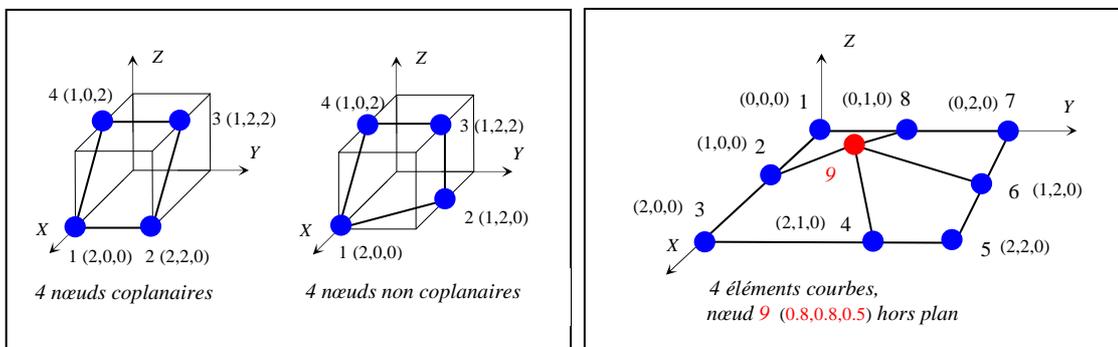


Figure 5.1. Patch-test de modes rigides. Maillages utilisés

### 5.2.1. Vérification des modes de translation rigide

#### a. Pour un seul élément (figure 5.1.a)

Nous imposons des degrés de liberté aux 4 nœuds en accord avec les modes rigides de translation (translation selon les axes X,Y et Z), nous obtenons une énergie interne nulle (de l'ordre de  $10^{-15}$ ) pour les éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml, quelle que soit leur forme géométrique (plane ou courbe). Nos éléments permettent donc une représentation exacte des trois mouvements de translation rigide.

#### b. Pour un assemblage d'éléments (Figure (5.1.b))

Des valeurs de  $U, V, W, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z$  en accord avec les 3 modes rigides de translation sont imposées aux nœuds dans le plan XY. Considérons par exemple le mode  $\vec{j}$  (translation selon y), nous imposons les ddl suivants aux nœuds 1 à 8 :

$$V=1 \text{ et } U=W=\theta_X=\theta_Y=\theta_Z=0 \quad (5.1)$$

#### Résultats :

Après résolution et prise en compte des conditions aux limites, nous obtenons au nœud libre hors plan 9 :

$$\begin{aligned} V_9=1, U_9= W_9=\theta_{X9}= \theta_{Y9}= \theta_{Z9}=0 \\ \sigma_x= \sigma_y=\tau_{xy}= \tau_{xz}= \tau_{yz}=0 \text{ en tout point .} \\ \pi_{int} = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [K] \{u_n\} = 0 \end{aligned}$$

Le mode  $j$  est ainsi représenté exactement. Les deux autres modes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$  sont également représentés exactement avec les éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml .

### 5.2.2. Vérification des modes rigides de rotation :

Nous utilisons la même démarche que précédemment. Des valeurs de  $\{u_n\}$  sont imposées aux nœuds plans 1 à 8 en accord avec un mode de rotation rigide, par exemple le mode « rotation d'axe  $\vec{i}$  » suivant :

$$\langle u_n^R \rangle = \langle 0 \quad -Z_k \quad Y_k \quad 1 \quad 0 \quad 0 \rangle \quad (\text{mode } \vec{\theta}^R = \vec{i}), k=1 \text{ à } 8 \quad (5.2)$$

Résultats: Après résolution et prise en compte des conditions aux limites, nous obtenons au nœud 9 :

H=1, <math>\langle u_0 \rangle</math>						
Élément	U	V	W	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
NHMiSP4/ml/s*	-0.0001954	-0.49874	0.80133	1.0042	-0.003598	0.019109
HMiSP4/Q4/ml/s	-0.0002736	-0.49885	0.80123	1.0043	0.0036066	0.01906
NHMiSP4/ml/f*	0.000092201	-0.49960	0.80068	1.0034	-0.0037011	0.019062
HMiSP4/Q4/ml/f	-0.00017165	-0.49744	0.80208	1.0040	-0.0030864	0.018127
MiSP4/Q4 [11]	0.0003	-0.495	0.798	1.015	-0.001	0.027
Valeur exacte	0.	-0.5	0.8	1.	0.	0.

H=100, <math>\langle u_0 \rangle</math>						
Élément	U	V	W	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
NHMiSP4/ml/s	-0.026486	-0.51543	0.78989	0.98347	0.0075035	0.022667
HMiSP4/Q4/ml/s	-0.024938	-0.51476	0.78984	0.98376	0.0068375	0.022533
MiSP4-Q4 [11]	0.0003	-0.495	0.798	1.015	-0.001	0.027
Valeur exacte	0.	-0.5	0.8	1.	0.	0.

/s : version simplifiée des modèles de coques développés (approximations linéaire en  $\zeta$  des déformations  $\{\epsilon_s\}$  et constante en  $\zeta$  des déformations de CT  $\{\gamma_s\}$ .

/f : version complètes des modèles de coques développés (approximations quadratiques en  $\zeta$  des déformations  $\{\epsilon_s\}$  et linéaire en  $\zeta$  des déformations de CT  $\{\gamma_s\}$ .

**Tableau.5.1.** Résultats des déplacements au nœud 9

Ce résultat montre que les modèles NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml, utilisés sous leur forme courbe, ne permettent pas une représentation exacte du mode rigide  $\bar{\theta}^R = \bar{i}$ . Un résultat similaire est également obtenu pour les deux autres modes de rotation rigide. Ce test est cependant satisfait quand il s'agit d'un assemblage d'éléments plans sans gauchissement.

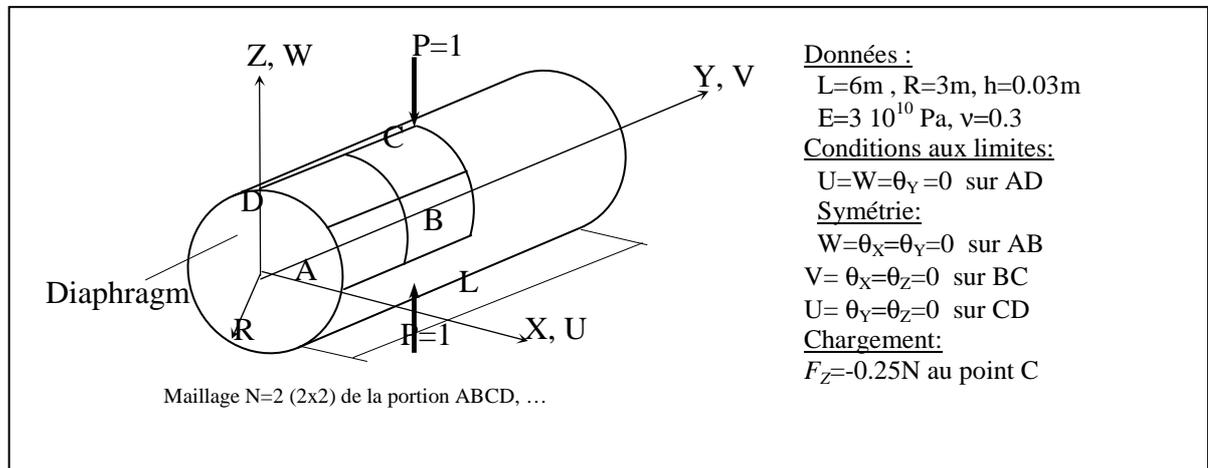
### 5.3. Résultats des cas-tests standards de coque isotrope

#### 5.3.1 Cylindre pincé avec diaphragme

Un des cas-tests qualifiés de sévères par les ingénieurs est celui d'un cylindre court ( $L/R = 2$ ) et mince ( $R/h=100$ ,  $L/h=200$ ) supporté par deux diaphragmes rigides à ses extrémités et soumis à deux charges unité concentrées diamétralement opposées (Figure 5.2). Ce test permet d'examiner l'aptitude d'un élément de coque à simuler des états de membrane complexes avec une part importante de flexion sans extension de la surface moyenne, notamment au niveau des zones sollicitées (point C). Le problème étant symétrique, des maillages réguliers à  $N=2$  à 15 éléments par côté sont utilisés pour modéliser le huitième de la coque. Sur la (figure 5.3, 5.4) sont présentées respectivement les courbes de convergences des déplacements  $W_C$  et  $V_D$  en fonction de  $N$ . Une solution de référence basée sur une théorie de coques minces est donnée par Flügge [72] et Lindberg et al [73] :

- Déplacement  $W_C$  sous la charge :  $W_{ref} = -W_C Eh/P = 164.24$
- Déplacement  $V_D$  suivant l'axe  $Y$  :  $V_{ref} = -V_D Eh/P = 4.11$

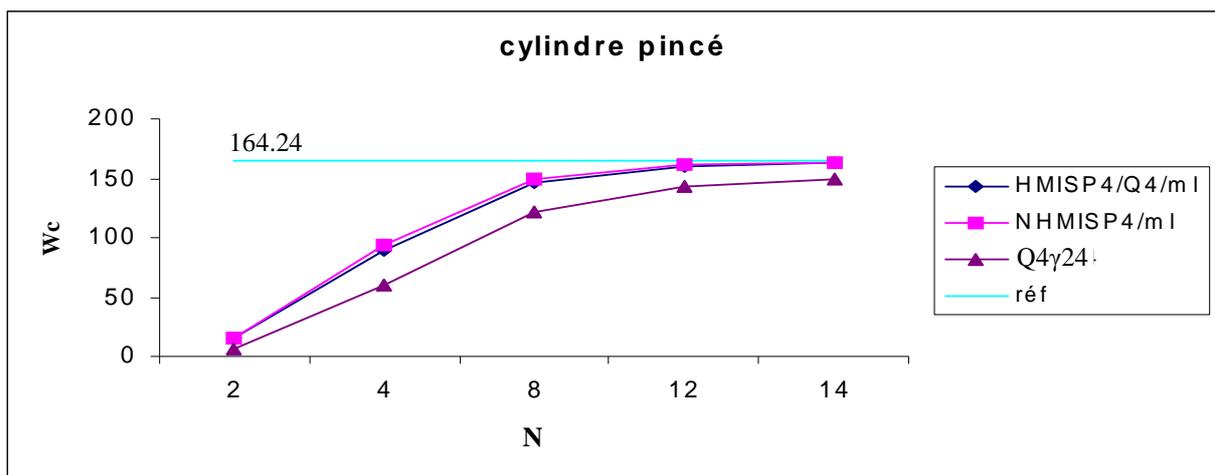
Les courbes des éléments NHMISP4/ml et HMISP4/Q4/ml en version simplifiée coïncident avec celles de ses mêmes modèles formulés en version complète. Cette constatation nous paraît logique compte tenue de la coplanarité des éléments du maillage (gauchissement nul).



**Figure.5.2.** Cylindre pincé avec diaphragme. Données

Convergence de  $W_C$  :

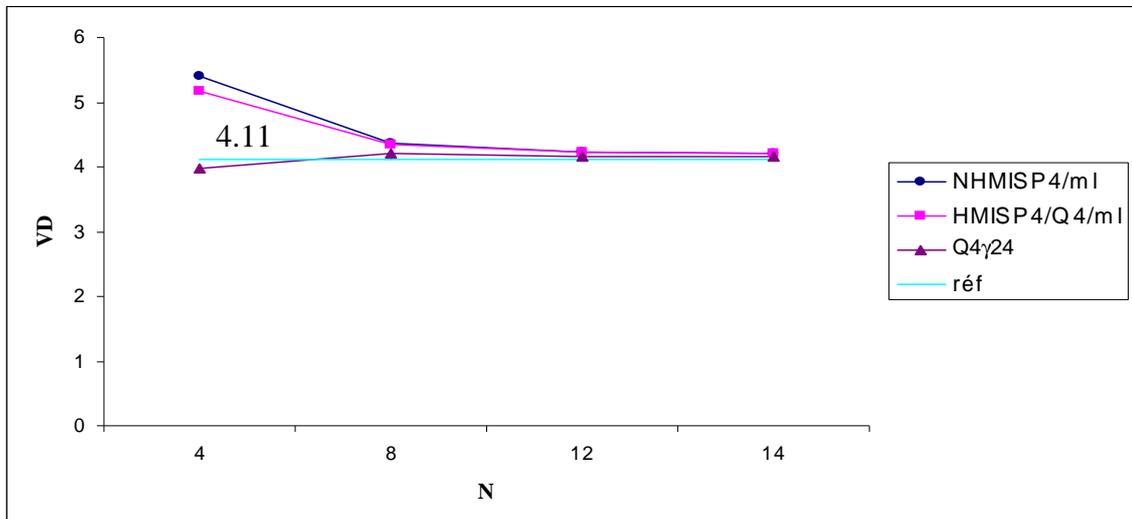
Une convergence rapide vers la solution exacte est obtenue par les éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml puisque les deux comportements en membrane et en flexion sont bien représentés respectivement, par la formulation mixte-hybride et la formulation (classique ou hybride naturelle). Par contre, on observe une convergence un peu lente de l'élément Q4 $\gamma$ 24.



**Figure.5.3.** Convergence de  $W_C$

### Convergence de $V_D$ :

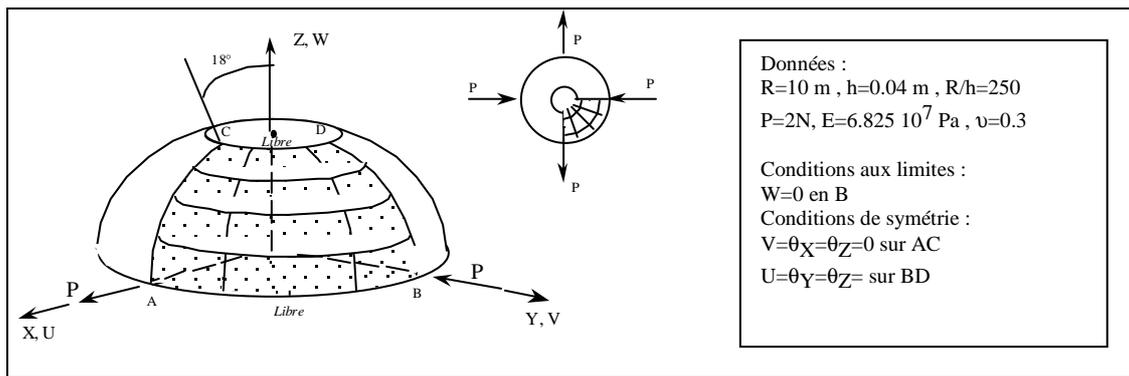
Les éléments courbes NHMiSP4/ml, HMiSP4/Q4/ml et Q4 $\gamma$ 24 convergent également rapidement vers la solution de référence.



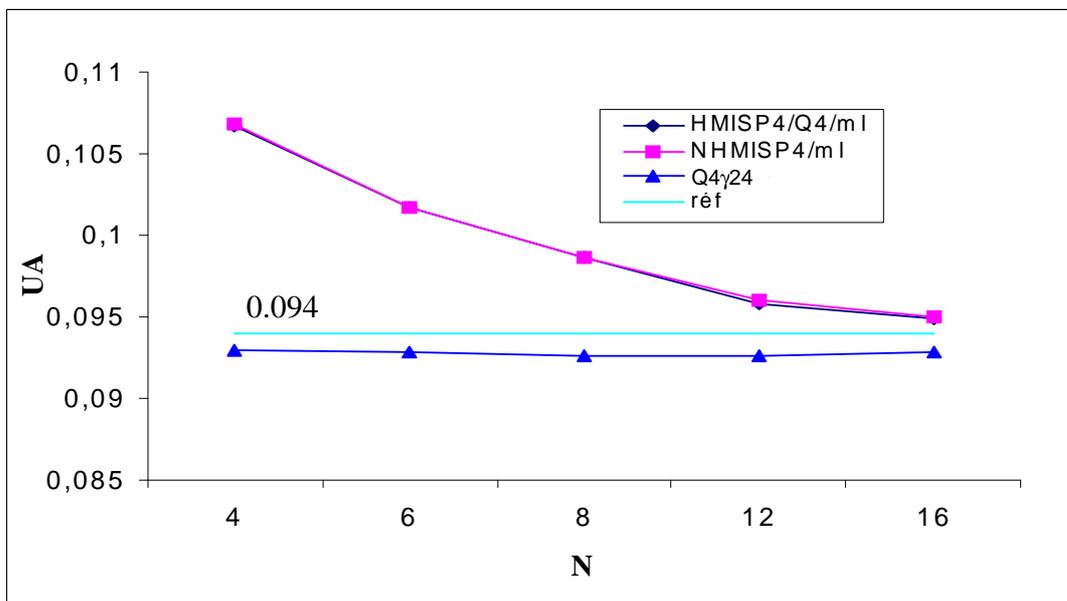
**Figure.5.4.** Convergence de  $V_D$

### 5.3.2. Hémisphère isotrope sous charges diamétralement opposées

Le problème de l'hémisphère pincé est fréquemment traité pour évaluer les performances d'un élément de coque. Il s'agit d'une coque hémisphérique mince ( $R/h=250$ ) soumise à la base libre à quatre charges radiales concentrées. Les caractéristiques mécaniques et les conditions aux limites utilisées sont présentées sur la figure 5.5. Dans cet exemple, l'hémisphère subit d'importantes rotations de corps rigides et des déformations de flexion sans extension. Ce problème est un bon test pour vérifier l'absence de blocage en membrane et la bonne représentation des mouvements de corps rigide. Le problème étant symétrique, seul le quart de la structure est discrétisé en  $N \times N$  éléments réguliers ( $N = 2$  à 16 par côté). Nous présentons sur la figure 5.6 les résultats obtenus pour le déplacement radial  $U_A = -V_B$  en fonction du maillage. Une solution de référence classique est donnée par MacNeal et Harder [74] :  $U_A = -V_B = 0.094$  m. Une convergence monotone est obtenue par nos éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml.



**Figure.5.5.** Hémisphère pincé. Données



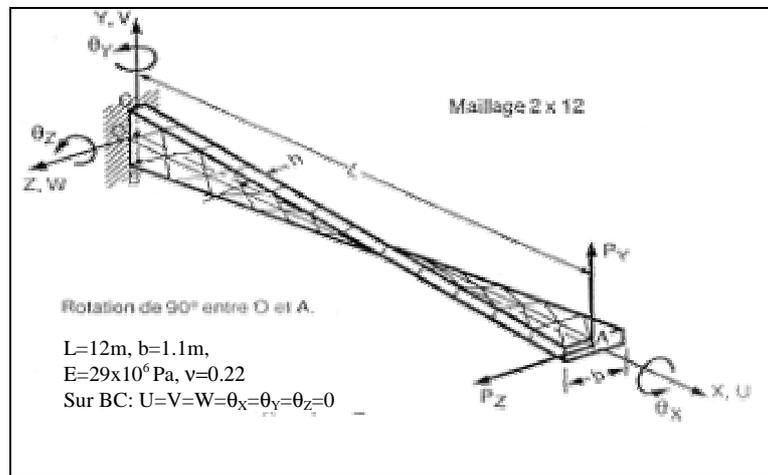
**Figure.5.6.** Hémisphère pincé. Convergence de  $U_A$

### 5.3.3. Poutre vrillée isotrope sous charges concentrées

Ce problème a été proposé par MacNeal et Harder [74]. Il s'agit d'une poutre vrillée ou d'une coque hélicoïdale encastree à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentré à l'autre extrémité: une charge  $P_Z$  dans le plan (suivant l'axe Z) et une autre hors plan  $P_Y$  (suivant l'axe Y) (figure 5.7). Ce test met en évidence le gauchissement de la coque. Il constitue ainsi un bon examen de validation d'éléments finis de coque tenant compte du gauchissement de la surface moyenne, en particulier les éléments quadrilatéraux à 4 nœuds NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml que nous proposons. Nous comparons les résultats des déplacements dans la direction de la charge à une solution exacte obtenue par Batoz & Triki [75] en utilisant un élément fini de poutre vrillée. Celui-ci est formulé en considérant un modèle variationnel mixte avec satisfaction des équations de l'équilibre interne. Les déplacements  $W$  et  $V$  au point A sont donnés pour deux épaisseurs différentes :

	Epaisseur $h=0.32$ ( $L/h=37.5$ )	Epaisseur $h=0.0032$ ( $L/h=3750$ )
Chargement dans le plan $P_Z=10^3, P_Y=0$	$W_A=5.424$	$V_A=1.754$
Chargement hors plan $P_Y=10^3, P_Z=0$	$W_A=5316$	$V_A=1296$

Nous avons analysé ce problème en considérant les maillages 2x12 (figure 5.7), 4x24 et 6x36. Les résultats des éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml sont comparés à ceux des éléments MiSP4-Q4 [11], Q4 $\gamma$ -Q4[11,83] et DKT-CST [76]. Les résultats pour les deux cas de charge sont reportés sur les tableaux 5.2a et 5.2b pour l'épaisseur  $h=0.32$  et  $h=0.0032$  respectivement.



**Figure. 5.7.** Poutre vrillée. Données

Pour  $h=0.32$  (tableau 5.2a), l'ensemble des éléments convergent de façon monotone vers la solution de référence pour les deux cas de charge. Dans le cas du chargement hors plan, les effets de membrane dominent ceux de flexion au voisinage de l'encastrement, c'est pour cette raison que l'élément NHMiSP4/ml (riches en membrane) donne de très bons résultats. La convergence des éléments MiSP4-Q4, Q4 $\gamma$ -Q4 et DKT-CST est plus lente car la partie membrane, représentée par les éléments standards bilinéaire Q4 (pour les quadrilatères) et linéaire CST (pour le triangle DKT), n'est pas assez riche en approximation pour simuler des effets membranaires dominants.

a. *Chargement dans le plan* :  $P_Z = 10^3, P_Y = 0, h=0.32$

Maillage	NHMiSP4/ml	% erreur	HmiSP4/Q4/ml	% erreur	MiSP4-Q4	Q4 $\gamma$ -Q4	DKT-CST
2x12	5.3951	0.533	5.3673	1.045	5.348	5.348	5.327
4x24	5.4106	0.247	5.4019	0.408	5.395	5.395	5.367
6x36	5.4137	0.190	5.4096	0.265	5.406	5.406	5.343

Référence :  $W_A=5.424$

b. *Chargement hors plan :  $P_Y = 10^3$ ,  $P_Z = 0$ ,  $h=0.32$*

Maillage	NHMiSP4/ml	% erreur	HmiSP4/Q4/ml	% erreur	MiSP4-Q4	Q4 $\gamma$ -Q4	DKT-CST
2x12	1.7317	1.271	1.616	7.868	1.607	1.607	1.465
4x24	1.746	0.456	1.7099	2.514	1.708	1.708	1.621
6x36	1.7495	0.256	1.7326	1.220	1.731	1.731	1.682

Référence :  $V_A=1.754$

**Tableau 5.2.a.** Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour  $h=0.32$

c. *Chargement dans le plan :  $P_Z = 10^3$ ,  $P_Y = 0$ ,  $h=0.0032$*

Maillage	NHMiSP4/ml	% erreur	HMiSP4/Q4/ml	% erreur	MiSP4-Q4	Q4 $\gamma$ -Q4	DKT-CST
2x12	5191	2.351	5164	2.859	5127	5127	5268
4x24	5238	1.467	5219	1.824	5205	5204	5203
6x36	5258	1.091	5250	1.241	5227	5227	5258

Référence :  $W_A=5316$

d. *Chargement hors plan :  $P_Y = 10^3$ ,  $P_Z = 0$ ,  $h=0.0032$*

Maillage	NHMiSP4/ml	% erreur	HMiSP4/Q4/ml	% erreur	MiSP4-Q4	Q4 $\gamma$ -Q4	DKT-CST
2x12	1274	1.697	1266	2.315	1257	1256	1285
4x24	1288	0.617	1284	0.926	1283	1283	1282
6x36	1291	0.386	1289	0.540	1288	1288	1287

Référence :  $V_A=1296$

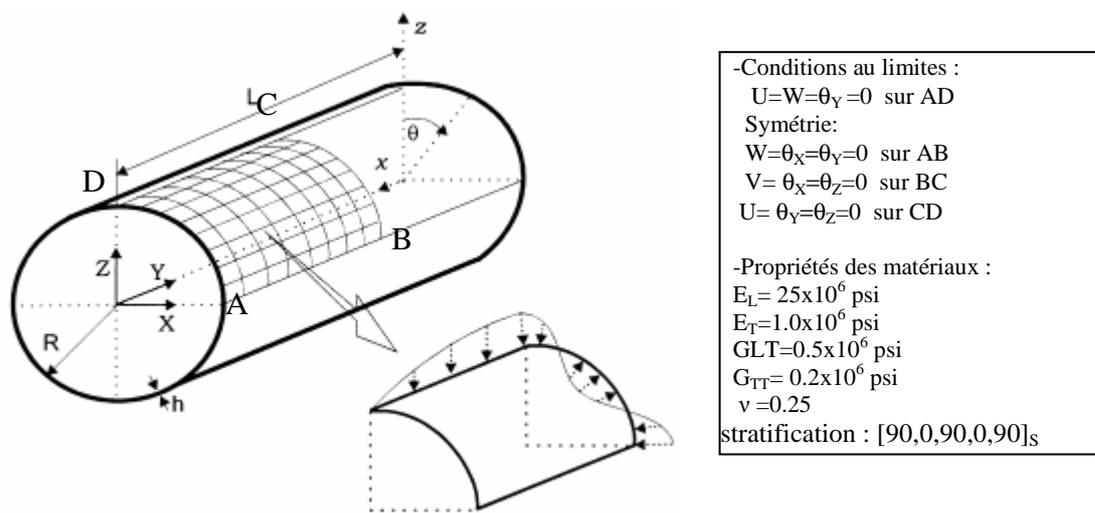
**Tableau 5.2.b.** Poutre vrillée. Résultat des déplacements en A pour  $h=0.0032$

Les éléments en version complète conduisent aux mêmes résultats que ceux en version simplifiée.

## 5.4. Application aux coques composites multicouches

### 5.4.1 Etude d'un cylindre stratifié simplement supporté sous chargement sinusoïdal

Un cylindre relativement long ( $L=80$ ,  $R=20$ ) simplement supporté est soumis à un chargement sinusoïdal  $q = q_0 \sin(\pi y / L) \cdot \cos(4\theta)$ . Il est composé d'une stratification à 10 couches (5 couches symétriques  $[90,0,90,0,90]_S$ ) (figure 5.8).



**Figure 5.8.** Cylindre simplement supporté avec chargement sinusoïdal. Données

$$\bar{w}_c = \frac{100 E_T}{q_0 S^4 h} w_c, S = \frac{R}{h}$$

h	$w_c$ (maillage (8x8) NHMiSP4 /ml)	$w_c$ (Maillage NHMiSP4/ml 20x20)	% erreur	$w_c$ (maillage 16x20) EHOST [91] (élément de coque à 9 nœuds et 5ddl/nœuds)	Sol. Analytique [81]	Elasticité 3D [82]
2	0.95055	1,015	26.449	1,373	1.369	1.38
0,4	0,319892	0,54928	27.935	0,7613	0.762	0.7622
0,2	0,23501	0,47124	24,734	0,6256	0.6255	0.6261

**Tableau 5.3.** Cylindre simplement supporté. Flèche au point C

Pour ce type de chargement, l'accroissement de charge est rapide d'un élément à un autre sur la circonférence, la convergence serait mieux étudiée avec un maillage plus fin (par exemple 25x25).

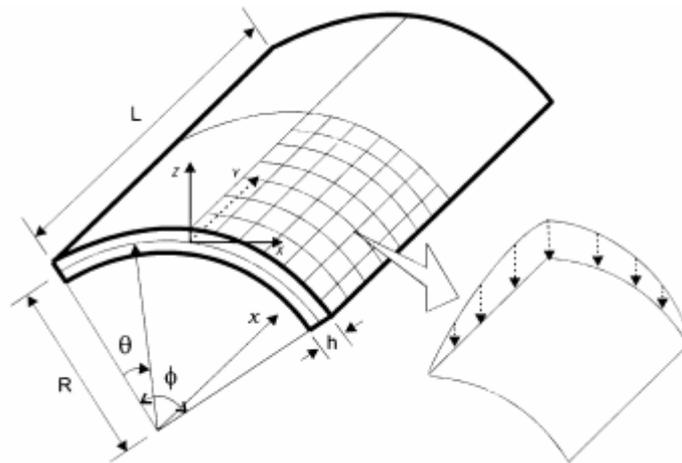
La convergence de notre modèle est moins lente en raison de l'influence du cisaillement transverse (Tableau 5.3). Rappelons que le modèle EHOST possède deux

caractéristiques pouvant améliorer ses résultats rapidement : d'une part l'effet de zig-zag associé à la théorie d'ordre supérieur (amélioration du champ de déplacement) et l'utilisation, d'autre part, d'un élément enrichi à 9 nœuds et 5 ddl/nœud).

Le grand écart entre la solution numérique obtenue par notre modèle et les solutions de référence pourrait s'expliquer par les imperfections géométriques des maillages, en particulier lorsque le rayon est relativement petit par rapport à L.

#### 5.4.2. Etude d'un panneau cylindrique simplement supporté avec chargement sinusoïdal

Un panneau cylindrique simplement supporté est soumis à un chargement sinusoïdal  $q = q_0 \sin(\pi x / L) \cdot \sin(\pi \theta / \phi)$  ( $\phi = \pi / 3$ ,  $L=30$ ,  $R=5$ ). Il est composé d'une stratification à 3 couches 90/0/90° (figure 5.9). Nous utilisons les mêmes conditions aux limites et propriétés du problème précédent.



**Figure 5.9.** Panneau cylindrique simplement supporté sous chargement sinusoïdal. Données

Le tableau des résultats de la flèche au centre du panneau (tableau 5.4) montre que notre modèle à membrane hybride NHMiSP4/ml converge vers les solutions de référence.

L'écart entre la solution numérique obtenue par notre modèle et les solutions de référence s'explique également par les imperfections géométriques des maillages et, dans une moindre mesure, par l'influence du CT.

h	$\bar{W}$ (maillage (8x8) NHMiSP4 /ml)	$\bar{W}$ (Maillage 20x20) NHMiSP4/ml)	% erreur	$\bar{W}$ (maillage 16x20) EHOST [30] (élément de coque à 9 nœuds et 5ddl/nœuds)	Sol. Analytique [ 82]	Elasticité 3D [ 83]
1	3,22112	3.28432	14.471	3.862	3.694	3.84
0,5	1,24712	1.42148	9.919	1.5793	1.578	1.578
0,25	0,82115	0.92275	8.882	1.0126	1.017	1.0127

**Tableau 5.4.** Panneau cylindrique simplement supporté. Convergence de la flèche au centre

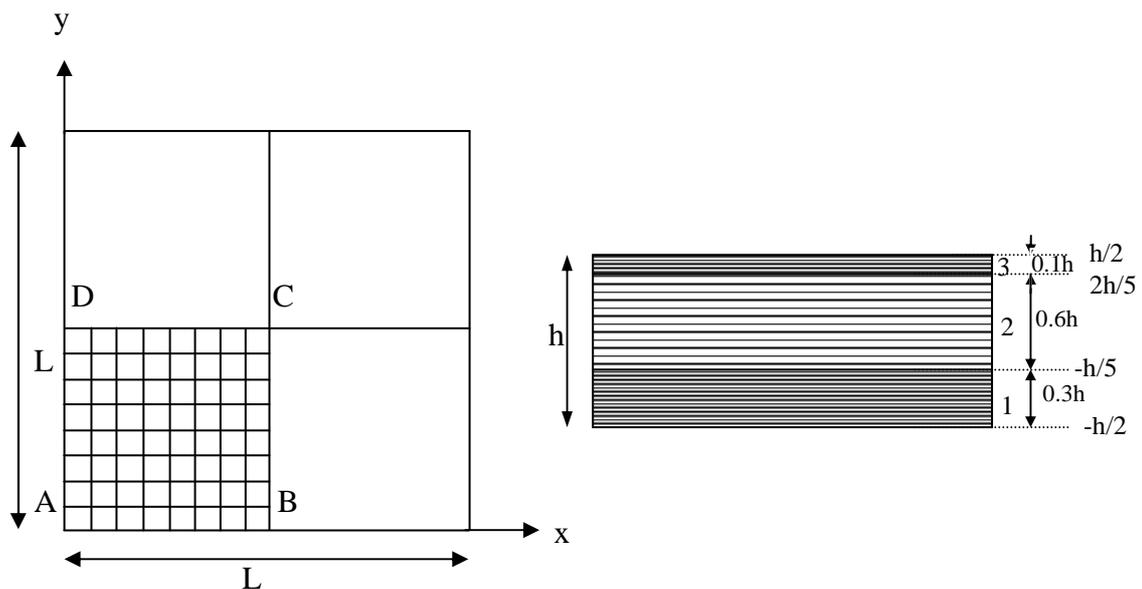
### 5.4.3. Etude d'une plaque sandwich non-symétrique

Une plaque carrée Sandwich, simplement supportée avec effet de couplage membrane-flexion, est soumise à un chargement uniforme.

Ce problème a été déjà traité en chapitre 3 (en section 3.23) mais dans le cas présent, la stratification n'est pas symétrique ( $h_1=0.3$ ;  $h_2=0.6$ ;  $h_3=0.1$ ) et par conséquent, il faut prendre en compte l'effet de couplage flexion-membrane. Les résultats sont donnés sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\bar{w} = \frac{wG_{12}(2)}{hq_0}, \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{q_0} \quad \text{equ (3.9)}$$

Les résultats des déplacements et des contraintes associés au modèle HMiSP4/Q4/ml sont reportés dans le tableau 5.5. Concernant la flèche  $\bar{w}$  au centre de la plaque, nous observons une bonne corrélation de nos résultats avec la solution tridimensionnelle de Srinivas [59] ou ceux d'Owen et de Figueiras [60].



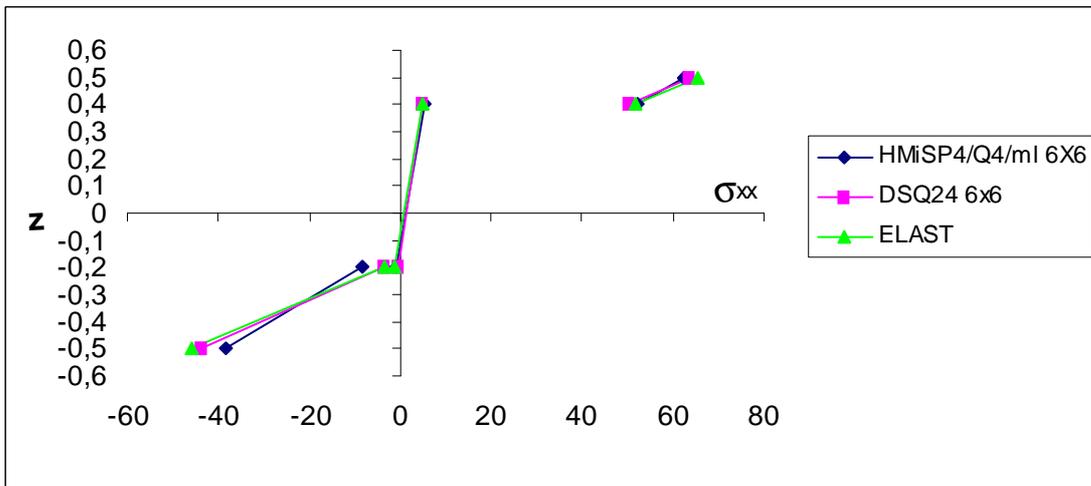
**Géométrie :**  $L=1000$  mm,  $h=100$  mm,  $e_1=30$ ,  $e_2=60$ ,  $e_3=10$   
**Matériau :** (orthotrope) , 3 couches non symétriques  $0/0/0^\circ$ , Chargement uniforme  
 Peau :  $E1=3.4156$  Pa,  $E2=1.7931$  Pa.,  $G12=1$  Pa,  $G13=0.608$  Pa,  $G23=1.015$  Pa,  $\nu=0.44$   
 Cœur :  $E1=0.34156$  Pa,  $E2=0.17931$  Pa.,  $G12=0.1$  Pa,  $G13=0.0608$  Pa,  $G23=0.1015$  Pa,  $\nu=0.44$   
**Conditions aux limites :**  $w=\theta_y=0$  sur AB ;  $u=\theta_y=0$  sur BC ;  $v=\theta_x=0$  sur CD ;  $w=\theta_x=0$  sur DA  
**Chargement uniforme :**  $q_0=1$  N/mm<sup>2</sup>

**Figure 5.10.** Plaque carrée Sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme- Données du problème

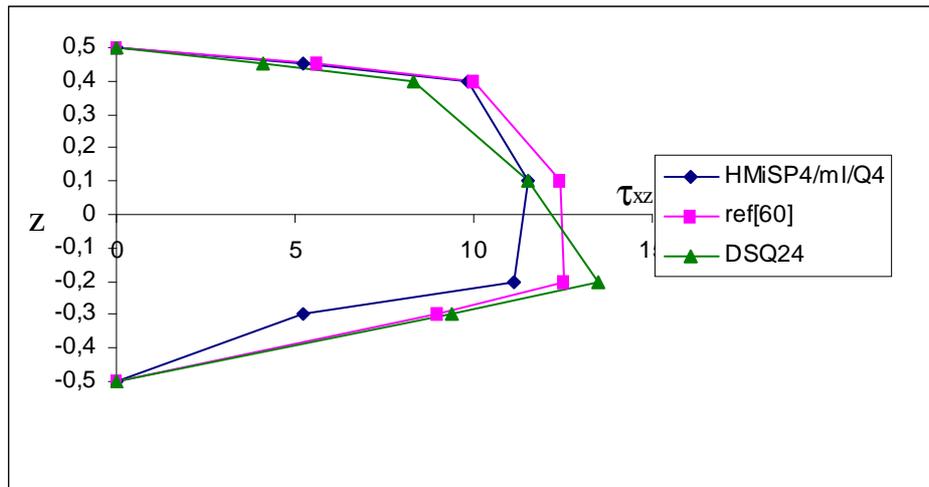
Modèle (maillage nxn)	$w_C(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0)$	$\bar{\sigma}_{Cxx}$ $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, +\frac{h}{2})$	$\bar{\sigma}_{Cxx}$ $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{4h+}{10})$	$\bar{\sigma}_{Cxx}$ $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{4h-}{10})$	$\bar{\sigma}_{Cxx}$ $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, -\frac{4h+}{10})$	$\bar{\sigma}_{Cxx}$ $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, -\frac{4h-}{10})$	$\bar{\sigma}_{Cxx}$ $(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, -\frac{h}{2})$
Heterosis[60] (4x4)	34.92	63.5	53.22	5.32	-0.85	-8.5	-39.35
DSQ[8] (6x6)	34.55	63.67	50.24	5.04	-0.34	-3.4	-43.77
HMiSP4/Q4/ml (6x6)	36.136	62.3	52.2	5.22	-0.813	-8.13	-38.3
% erreur	-4.590	2.289	-3.901	-3.571	-139.117	-139.117	12.497
DST[8] (6x6)	34.62	58.03	48.54	4.85	-0.84	-8.4	-36.87
Elasticité [59]	34.55	63.76	50.24	5.04	-0.34	-3.4	-43.77

**Tableau 5.5.** Plaque carré sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme- Comparaison des déplacement et contraintes  $\sigma_{xx}$  maximum

Les valeurs obtenues pour les contraintes sont également satisfaisantes. On note une dissymétrie de la distribution par rapport à l'axe moyen, en raison de couplage membrane-flexion. Les figures 5.11a et 5.11b montrent respectivement la distribution de la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  et de cisaillement transversal  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur. Dans les deux cas, la distribution selon l'épaisseur est en bon accord avec la solution de référence tridimensionnelle.



**Figure 5.11a.** Plaque carrée sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme –Distribution de  $\sigma_{xx}$  à travers l'épaisseur ( $L/h=10$ )



**Figure 5.11b.** Plaque carré sandwich non symétrique simplement supportée sous charge uniforme –Distribution de  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur ( $L/h=10$ )

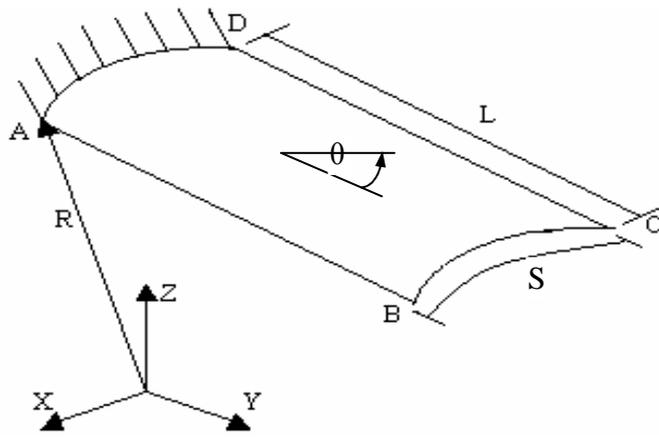
Remarque : L'influence des effets de cisaillement et de gauchissement (ordre supérieur du champ de déplacement) explique en partie l'erreur importante obtenue sur la contrainte  $\tau_{xz}$ .

## 5.5. Etude des vibrations libres de structures composites

### 5.5.1. Vibrations libres de panneaux composites

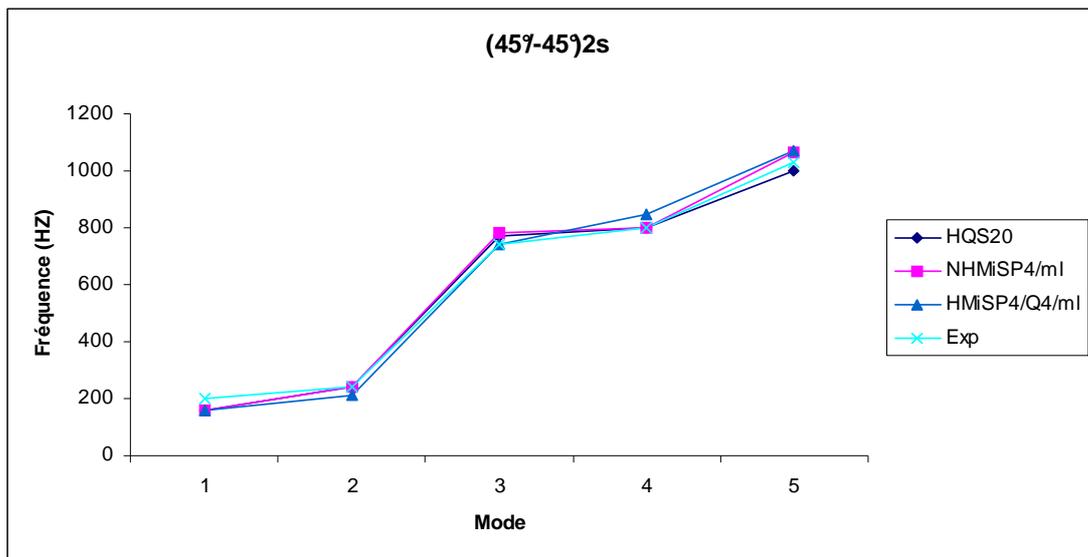
Cet exemple a été traité par Crawley [77]. L'étude concerne trois panneaux cylindriques de même dimension avec différentes séquences d'empilement (voir figure 5.12) :  $[0_2/\pm 30]_s$ ,  $[0/\pm 45/90]_s$ ,  $[\pm 45]_{2s}$ . Les plis sont en carbone-Epoxy. Les panneaux sont encastés sur un côté courbe et libre sur le reste du contour.

Nous avons simulé les 5 premières fréquences propres à notre élément et nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus avec l'élément HSQ20 (Bouabdallah [9]) (Figure 5.13a,bc). Le maillage utilisé est  $8 \times 16$ . Rappelons que l'élément fini HSQ20 est quadrilatéral à 4 nœuds et 5 ddl/nœud.

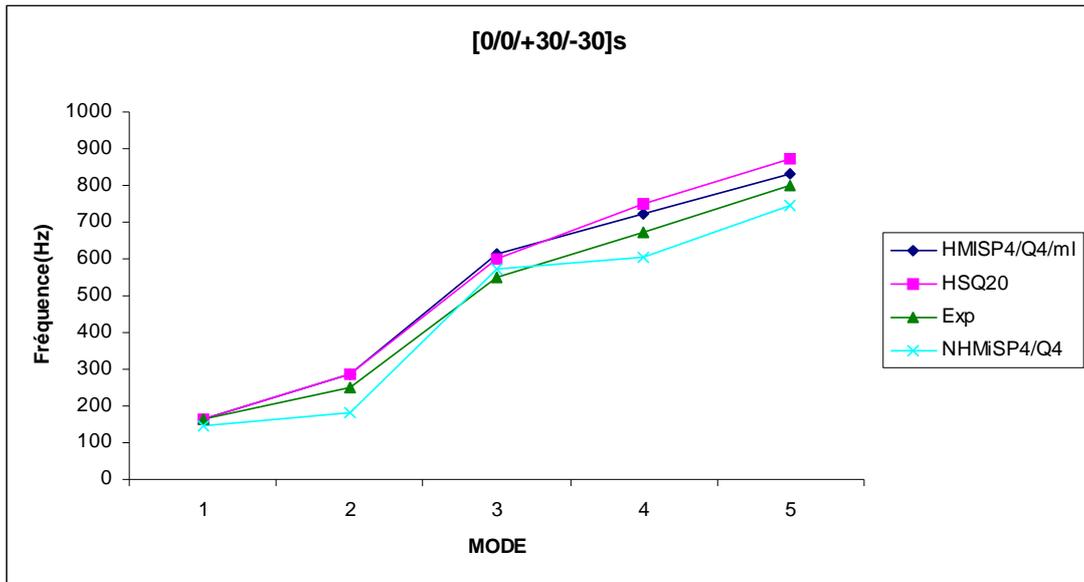


**Géométrie :**  $R=127$  mm ,  $L=152$  mm ,  $S=76$  mm ,  $h=0.13 \times 8=1.04$  mm  
**Matériau :** (orthotrope)  
 $E_1=128$  Gpa ;  $\nu_{12}=0.25$  ;  $G_{12}=4.486$  Gpa ;  $E_2=11$  Gpa ;  $G_{13}=1.53$  Gpa ;  $\rho=1.5 \times 10^3$  Kg/m<sup>3</sup>  
**8 couches non symétriques :**  $[0_2/\pm 30]_S$  ;  $[0/\pm 45/90]_S$  ;  $[+45/-45/-45/+45]_S$   
 Conditions aux limites :  $u=v=w=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$  sur AD

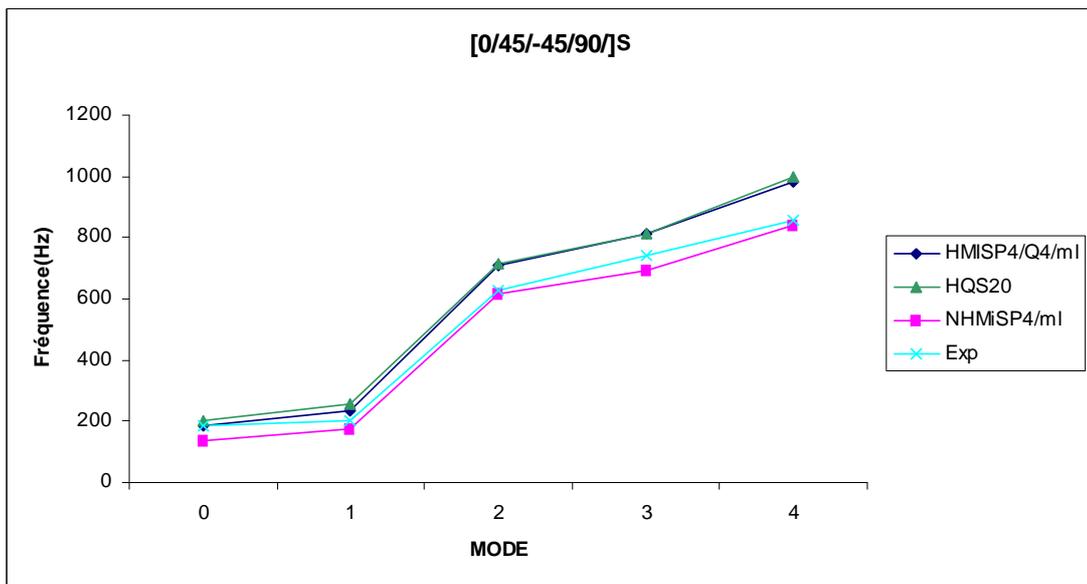
**Figure.5.12.** Vibrations libres de panneaux composites. Données



**Figure 5.13.a.** Fréquence propre par rapport aux Modes de vibration pour la stratification  $[45/-45/-45/45/45 /-45/-45/45]$



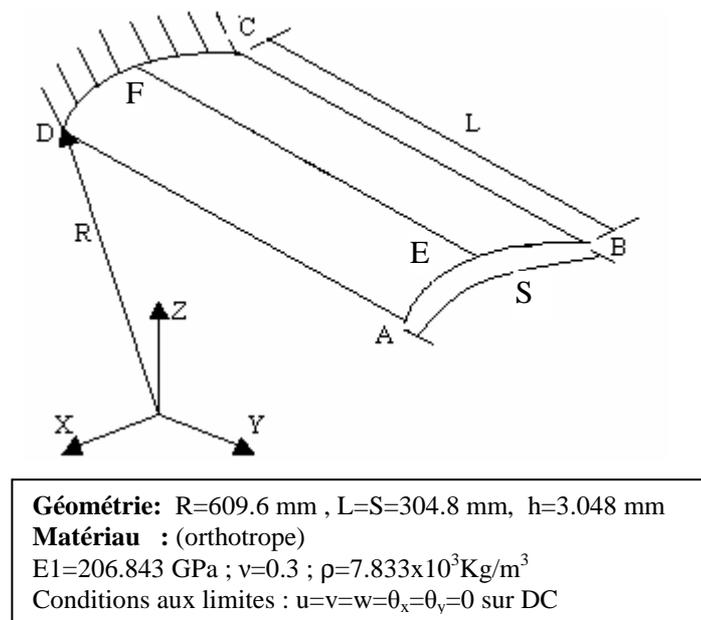
**Figure.5.13.b.** Fréquence par rapport aux Modes de vibration pour la stratification [0/0/30/-30 /30/0/0] .



**Figure 5.13.c.** Fréquence par rapport aux modes de vibration pour une stratification [0/45/-45/90]s.

### 5.5.2. Vibrations libres d'une pale ventilateur isotrope [9]

Dans le but d'évaluer les performances dynamiques de notre élément, nous avons déterminé les fréquences et modes propres d'une pale de ventilateur (voir le fig.5.14). Il s'agit d'un panneau cylindrique encastré à une extrémité courbe, les autres côtés étant libres. Les fréquences de références ont été obtenues expérimentalement par Olson et Linberg [78] .



**Figure.5.14.** Vibrations libres d'une pale de ventilateur. Données

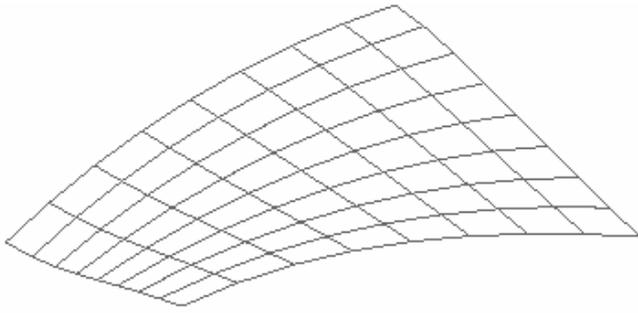
maillage	Elément \ mode	1	2	3	4	5	6
1x1	HSQ20(1x1)	56,21	138 ,87	217 ,68	-	-	-
	NHMiSP4/ml (1x1)	60.5759	97.1952	240.503	240.671	-	-
	% Erreur	29.234	27.736	7.142	31.433		
	HMiSP4/Q4/ml (1x1)	60.5785	100.831	242.153	240.236	-	-
	% Erreur	29.231	25.033	6.505	31.557	-	-
2x2	HSQ20 (2x2)	83.42	147.2	241 .81	396.5	407.32	606.35
	NHMiSP4/ml (2x2)	78.7995	133.093	263.800	330.261	357.315	622.057
	% Erreur	7.944	1.046	-1.853	5.908	9.540	-17.148
	HMiSP4/Q4/ml (2x2)	82.3239	137.556	269.548	337.290	361.538	624.145
	% Erreur	3.827	-2.272	-4.072	3.906	8.471	-17.541
4x4	HSQ20 (4x4)	85.52	141.2	245.72	370.64	410 .38	554.81
	NHMiSP4/ml (4x4)	81.6227	137.601	250.464	346.79	381.085	558.309
	% Erreur	4.646	-2.305	3.296	1.199	3.523	-5.143
	HMiSP4/Q4/ml (4x4)	82.9496	139.388	251.750	346.790	384.879	558.749
	% Erreur	3.096	-3.634	2.799	1.199	2.562	-5.226
8x8	HSQ20 (8x8)	85.72	139.34	246.58	349.50	392.14	535.26
	NHMiSP4/ml (8x8)	83.4449	138.297	247.745	384.420	341.011	536.069
	% Erreur	2.517	-2.823	4.345	-9.521	13.668	-0.954
	HmiSP4/Q4/ml (8x8)	83.8156	138.812	248.055	342.679	381.193	536.125
	% Erreur	2 .084	-3.206	4.226	-8.602	13.246	-0.965
	Exp [73]	85.6	134.5	259	351	395	531.0

**Tableau 5.6.** Vibrations libres d'une pale de ventilateur. Résultat des éléments HMISP4/Q4/ml et NHMISP4/ml.

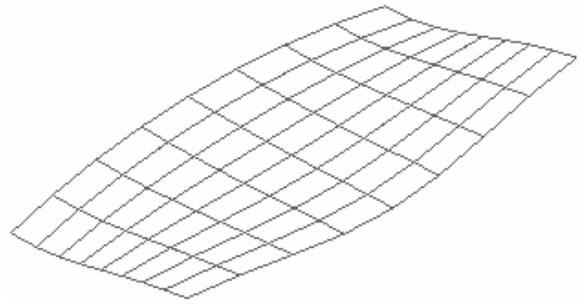
Nous avons obtenu deux types de modes propres symétrique (S) et Asymétrique (AS) (voir fig.5.15). D'après le tableau (5.6), il y a des erreurs sur les modes 4 et 5, surtout dans le cas d'un maillage 8x8 ( 8,6%, en mode 4, 13.24% en mode 5). La valeur de cette erreur dans le cas du maillage 4x4 est réduite à 1.19% pour le mode 4 et à 2 .5% pour le mode 5.

Remarque :

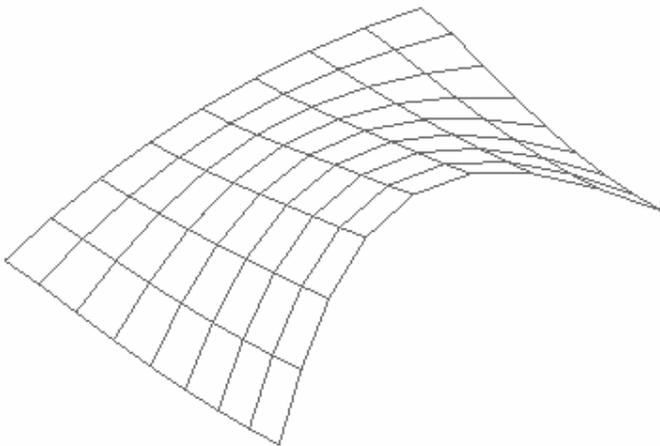
Les résultats du tableau 5.6 s'améliorent à partir d'un maillage 4x4 pour converger vers la solution de référence.



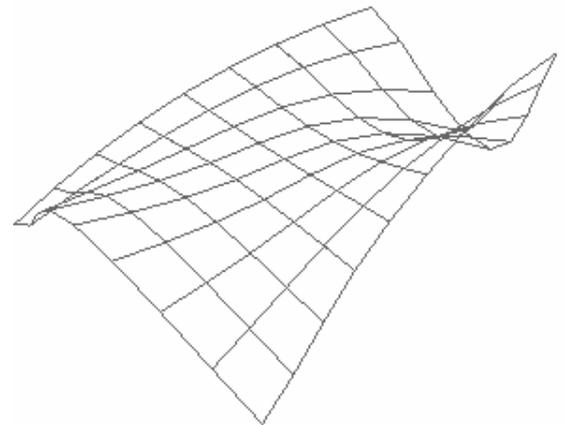
Mode1(A)



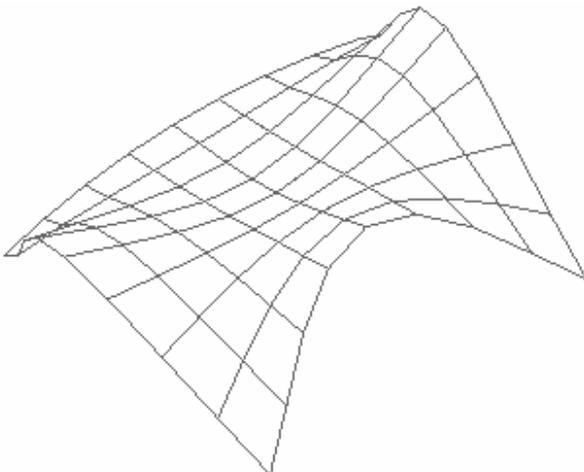
Mode2(S)



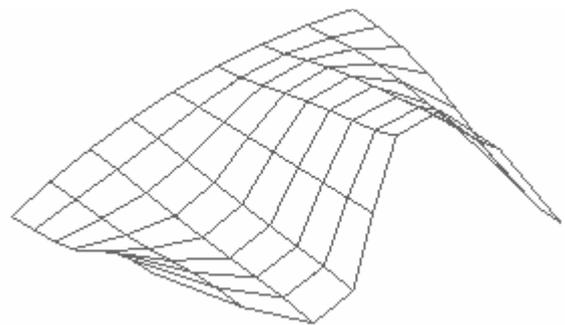
Mode3(S)



Mode4(A)



Mode5 (S)



Mode6(A)

**Figure.5.15.** Vibrations libres d'une pale de ventilateur- Modes propres- maillage(8x8)

### 5.5.3. Confrontation des éléments NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml à un élément d'ordre supérieur (HOST)

Dans cette section, nous proposons de confronter nos modèles mixtes-hybrides de coque à un modèle « élément fini » tridimensionnel à 9 nœuds et 9 ddl par nœud. Celui-ci est basé sur un modèle d'ordre supérieur appelé HOST (High Order Shel Theory). L'approximation du champ de déplacements étant cubique en z, ce qui éviterait l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement transversal. L'élément est considéré comme populaire ; sa matrice de rigidité tridimensionnelle étant simple à formuler.

#### 5.5.3.1. Vibrations libres d'un panneau cylindrique simplement supporté

Un panneau cylindrique simplement supporté de longueur a et de rayon R est composé d'une stratification à 2 couches [0,90°]. Les propriétés du matériau sont données par :

$$E_1 = 25E_2; E_2 = E_3; G_{12} = G_{13} = 0.5E_2; G_{23} = 0.2E_2$$

$$\nu_{12} = 0.25; \nu_{13} = 0.03; \nu_{23} = 0.40, \rho = 1, a = 100$$

Ce cas-test consiste à calculer les fréquences propres de vibrations libres pour deux valeurs différentes de la longueur (R=100 et a=200) et pour différentes valeurs de l'épaisseur h. Les résultats de nos modèles de coque NHMiSP4/ml et HMiSP4/Q4/ml sont confrontés à ceux donnés par le modèle d'ordre supérieur HOST (intégré exactement avec 3x3 PG) (Tableaux 5.7,5.8). Ils sont comparés à deux solutions de référence : la première est tridimensionnelle obtenue à partir des équations de l'élasticité 3D, la seconde est basée une théorie dite « de déformations de cisaillement parabolique » (PSD : Parabolic Shear Deformation)[80]. Un comportement global assez satisfaisant est obtenu par nos éléments.

R=100, Fréquence propre									
h	NHMiSP4/ml (10x10)	NHMiSP4/ml (16x16)	% erreur	HMiSP4/Q4/ml (10x10)	HMiSP4/Q4/ml (16x16)	% erreur	HOST [79]	Sol. 3D	PSD
5	0.951	0.945	0.945	0.778	0.756	3.867	0.786	0.787	0.799
10	1.188	1.181	1.181	1.084	1.077	-3.492	1.043	1.041	1.092
15	1.371	1.365	1.365	1.194	1.185	8.163	1.303	1.291	1.382

**Tableau 5.7.** Fréquences propres, panneau cylindrique R=100

R=200 , Fréquence propre									
H	NHMiSP4/ml 10x10	NHMiSP4/ml 16x16	% erreur	HMiSP4/Q4/ml 10x10	HMiSP4/Q4/ml 16x16	% erreur	HOST	Sol. 3D	PSD
5	0.694	0.682	-19.122	0.6	0.569	0.545	0.567	0.572	0.580
10	0.104	1.03	-10.011	0.785	0.807	13.758	0.918	0.936	0.956
15	0.124	1.23	1.896	0.959	0.995	20.663	1.231	1.253	1.289

**Tableau 5.8.** Fréquences propres, panneau cylindrique R=200 .

Remarque :

Le comportement en membrane de l'élément HMiSP4/Q4/ml est bien représenté pour les structures composites multicouches dont l'orientation est différent d'une couche à une autre. L'élément HMiSP4/Q4/ml est plus performant que l'élément NHMiSP4/ml pour lequel la matrice  $\bar{H}_m$  est corrigée de manière à satisfaire une variation localisée par couche de la matrice de comportement [H].

A partir des résultats des tableaux 5.7 et 5.8, on remarque que les fréquences diminuent dans le cas R= 200 en fixant l'épaisseur et le rayon, en raison que la coque devient plus plate donc il sera moins faisable sur la vibration, en addition que l'erreur augmente du fait que les frottements entre les couches diminuent, autrement dit la coque sera appropriée à déplacer en cisaillement plus qu'en flexion, alors l'influence de cisaillement augmente.

L'erreur augmente avec l'accroissement de h en raison de l'augmentation de l'influence de CT.

## Conclusions et perspectives

Dans cette étude doctorale, nous avons effectué un tour d'horizon des éléments finis en déplacement et/ou mixtes de plaque ou de coque, prenant en compte les effets de cisaillement transversal (CT) à travers l'épaisseur. Ils sont pour la plupart basés sur des théories d'ordre supérieur que nous avons résumées de façon synthétique. Ces théories permettant en effet de modéliser des structures composites stratifiées ou sandwich sans recourir aux facteurs  $k_i$  de correction du CT qui, rappelons le, sont assez contraignants à calculer puisqu'ils dépendent du nombre de couches. Rappelons que la théorie linéaire du premier ordre, communément associée à Reissner/Mindlin, mène à une déformation de CT constante dans la direction de l'épaisseur et nécessite de ce fait l'utilisation de ces facteurs correctifs de CT  $k_i$ .

Dès le début de cette étude doctorale, nous avons la conviction qu'à travers une formulation mixte ou mixte-hybride, tout en restant dans le domaine linéaire de Reissner/Mindlin, nous pouvions éviter le recours aux facteurs correctifs  $k_i$ . Les travaux de Ayad [70] ont montré que, dans un formalisme variationnel mixte-hybride (au sens de Hellinger-Reissner), une approximation adéquate des contraintes de CT (continuité  $C^{-1}$ ) conduisait à une correction naturelle du CT sans pouvoir introduire la valeur du facteur  $k$  (égale = 5/6 pour les sections isotropes). En effet,  $k=5/6$  apparaît naturellement dans le résultat de la formulation théorique ; il devenait en conséquence possible d'envisager la même démarche pour des sections composites multicouches.  $C'$  est ce que nous avons développé dans le cadre de cette étude doctorale.

Pour des raisons de simplicité, nous avons dans un premier temps formulé l'élément mixte-hybride de plaque que nous avons baptisé MISp4/ml (*Mixed with Shear Projection 4-nodes/multilayer*). En effet, partir sur une formulation mixte-hybride relativement complexe avec des hypothèses cinématiques et mécaniques discrètes définie localement (au niveau élémentaire), et à laquelle on rajoute une 2<sup>ème</sup> complexité liée à l'approximation des contraintes de CT, il devenait évident qu'on ne pouvait prendre le risque d'aller vers une formulation de coque à géométrie courbe. Le repère étant cartésien orthonormé pour une plaque, nous avons pu ainsi formuler l'élément fini multicouches de plaque MiSP4/ml dont nous rappelons les principales caractéristiques :

- il est basé sur le modèle variationnel *MiSP* (*Mixed with Shear Projection* model), proposé par Ayad en 1993 pour les matériaux isotropes, dont nous rappelons le principe de base :
  - o *MiSP* considère les déformations de CT comme étant indépendantes de l'approximation des variables cinématiques de plaque ( $w, \beta_x, \beta_y$ ). Il utilise la

méthode des déformations de CT de substitution (méthode ANS : *Assumed Natural Strains*) dans le but d'éliminer le problème de verrouillage en CT.

- dans *MiSP* , l'approximation des efforts de cisaillement transversal (ou des contraintes de CT) est obtenue à partir de celle des moments de flexion (ou des contraintes de flexion) en faisant intervenir deux des trois équations d'équilibre de la plaque en flexion/CT, d'où le nom de mixte-hybride pour ce modèle. L'équilibre est satisfait partiellement au niveau de la formulation variationnelle.
- Il est de forme quadrilatérale et possède 4 nœuds et 3 degrés de liberté par nœud : le déplacement transversal  $w$  et les deux rotations de la normale à la surface moyenne de la plaque  $\beta_x$  et  $\beta_y$ .
- Les cinq contraintes (3 contraintes planes et 2 contraintes de CT) sont interpolées indépendamment des lois de comportement, comme  $c'$  est souvent le cas dans les modèles déplacements. L'espace fonctionnel admissible étant  $C^{-1}$ , une approximation linéaire en  $z$  pour les contraintes planes, et surtout quadratique en  $z$  pour les contraintes de CT est utilisée pour obtenir un modèle mixte-hybride suffisant à éliminer les facteurs correctifs de CT au niveau variationnel. Ainsi la matrice de comportement en CT  $[\bar{H}_c]$  classiquement corrigée à l'aide des facteurs  $k_i$  pour les modèles déplacements, se trouve enrichie jusqu'à l'ordre 5 en  $z$  sans pouvoir utiliser de théories d'ordre supérieur ni de facteurs correctifs de CT. Il s'agit d'une correction naturelle opérée sur la formulation variationnelle. La matrice de comportement en flexion  $[\bar{H}_f]$  a également fait l'objet de correction pour tenir compte du caractère multicouche d'une plaque composite dans un contexte de formulation mixte. L'ensemble de ces investigations au niveau de la plaque constitue une des originalités de ce travail de recherche.

Une formulation qualitative d'éléments finis de plaques ne peut être complète sans une extension aux coques de forme quelconque. Nous avons en conséquence développé deux modèles d'éléments finis isoparamétriques courbes à 4 nœuds pour l'analyse des coques composites multicouches. L'introduction de la notion de repère covariant naturel et contravariant autorise la prise en compte, dans la formulation théorique, du gauchissement des coques. De plus, les déformations et les contraintes sont naturellement définies. Le premier modèle d'élément proposé est mixte-hybride naturel, baptisé NHMiSP4/ml (*Natural Hybrid Mixed with Shear Projection 4-node/multilayer*) : la partie membrane est complètement hybride, c'est une amélioration du modèle de Pian, et la partie flexion/CT est mixte-hybride, offrant toutes les deux à l'élément un avantage de taille, en terme de précision sur les contraintes, avec une sensibilité moindre aux distorsions de maillages. Le second modèle,

baptisé HMiSP4/Q4/ml, est développé en déplacement pour la membrane ; la flexion/CT restant mixte-hybride. Nous l'avons formulé pour tester son aptitude à reproduire des résultats satisfaisants, en dépit d'une représentation moins riche de la membrane. Notons bien évidemment que la démarche originale conduisant aux matrices de comportement corrigées  $[\bar{H}_f]$ (pour la flexion) et  $[\bar{H}_c]$ (pour le CT), utilisée en plaque pour éviter le recours aux facteurs correctifs du CT, a été adaptée avec succès dans la formulation des modèles de coques multicouches.

Nous avons essayé d'évaluer en première tentative les contraintes tridimensionnelles sur les couches à partir des approximations selon  $z$ , offertes par la condition de continuité  $C^1$ . L'utilisation de ces approximations ne permet pas un calcul de contrainte par couche. La technique proposée par Lardeur nous a semblée plus adéquate car elle part des équations de l'équilibre tridimensionnel en contraintes : un cheminement physique dans l'évaluation des contraintes respectant l'équilibre.

Notons enfin que l'intérêt de développer une telle stratégie dans le domaine de la formulation d'éléments finis multicouches n'est pas de remettre en cause des théories d'ordre supérieur ; celles-ci ont certainement leur avantage et bien évidemment leurs limites. L'approche multicouches proposée voit son intérêt dans l'éviction des facteurs correctifs du CT, assez onéreux à évaluer et dépendant du nombre de couches, tout en restant dans un contexte de théorie de premier ordre. Il devient ainsi naturel de confronter les performances de nos modèles de coques multicouches à celles des modèles issus des théories d'ordre supérieur. C'est ce que nous avons effectué à travers quelques tests réputés sévères de structures en plaques et coques multicouches (symétriques et non symétriques) sous sollicitations statiques et en vibrations libres. Notons que la formulation classique d'une matrice masse cohérente a été nécessaire pour une validation, en vibrations libres, de l'ensemble des modèles éléments finis développés dans ce travail de recherche.

Nous ne manquons pas de signaler que l'ensemble des modèles d'éléments finis mixtes-hybrides de plaques et de coques multicouches proposés sont simples de géométrie et d'approximation des déplacements et de contraintes. Ils n'utilisent pas de fonctions bulles (réputées très coûteuses) pour assurer leur stabilité.

### **Perspectives :**

En guise de perspectives à ce travail de recherche, nous envisageons de développer les aspects suivants :

- 1- Améliorer la distribution des contraintes planes à travers l'épaisseur, en considérant un gauchissement non constant de la section.
- 2- Développer une analyse des coques mixtes-hybrides dans le domaine non-linéaire, pour le calcul des configurations pré et post-flambement. Evaluer l'influence du CT.
- 3- Elaborer une démarche de conception d'emballages de transport en carton ondulé, visant à estimer au mieux la résistance à la compression verticale. Celle-ci pourrait être évaluée qualitativement en exploitant le formalisme non-linéaire, envisagé précédemment, sur une structure sandwich, en l'occurrence le carton ondulé. Il conviendrait de prendre en compte le contact entre le plateau de compression et le carton ondulé, ainsi que le comportement viscoélastique couplé à l'endommagement qui a été identifié dans une thèse récente présentée à l'UTC de Compiègne (Thèse Allaoui[84], 2005).

## Références

- [1] Berthelot J-M, "Matériaux composites, comportement mécanique et analyses des structures", 2<sup>ème</sup> Edition, Masson, Paris, 1996, ISBN: 2-225-85425-4.
- [2] Daniel Gay. "Matériaux composites". 4<sup>ème</sup> édition, Hermé Paris 1997, ISSN 1158-3509.
- [3] REMOND Y. & LAMON J. "Matériaux composites, Elaboration- conception – Structure - Comportement mécanique". Volume 1, Strasbourg 12,13 et 14 mars 2003.
- [4] Daniel Gay. "Matériaux composites". 5<sup>ème</sup> édition, Lavoisier Paris 2005, ISSN 2-7462-1098-3
- [5] Dhatt G . " Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchoff hypothesis". Proc. ASCE Symp. On Application of FEM in civil engineering, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., P. 255-278 (1969).
- [6] P.TOPDAR, A .H. SHEIKH AND N.DHANG ."Finite element Analysis of composite an Sandwich Plates Using a Continuous Inter-Laminar Shear Stress Model". , J. Sandwich Structures And Materials, Vol. 5\_July 2003.
- [7] Whitney J.M. " the effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates". J.Compos.Mater.Vol.3, p.534-547, 1969.
- [8] Lardeur P. "Développement et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal". Thèse de Doctorat, UTC , 1990.
- [9] BOUABDALLAH M.S. " Modélisation de coques cylindriques raidies, isotropes et composites, Thèse de Doctorat ". UTC, 1992.
- [10] KATILI I. "Formulation et évaluation de nouveaux éléments finis pour l'analyse linéaire des plaques et coques de forme quelconque". Thèse de Doctorat, UTC, 1993.
- [11] Ayad R. " Elément finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement ". Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne,France, 1993.
- [12] Cen, Long, Yao. "A new hybrid enhanced displacement based

- element for the analysis of laminated composite plate". *Computer and Structures* 80, (2002) 819-833.
- [13] Auricchio and Sacco. "A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates". *Meth.Engng.* 44, 1481-1504 (1999).
- [14] Nayak, Sheno, Moy. "Transient response of initially stressed composite sandwich plates". *Finite Elements in Analysis and Design* 42, (2006) 821 – 836
- [15] Goyal. "Dynamic Stability of Uncertain Laminated Beams Subjected to subtangential Loads". , Polytechnic Institute and State University Blacksburg, VA 24061-0203, 2002.
- [16] Madabhusi P. and J.F.Davalos. "Static shear correction factor for laminate rectangular beams". *Composites : Part B*, vol 27B, pp 285-293, 1996.
- [17] Cohen G.A. "transverse shear stiffnes of laminated anisotrope shells" . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.Vol 13, pp 205-220, 1978 .
- [18] Batoz J.L, Dhatt G . "Modélisation des structures par éléments finis". Volume 2, Poutres et Plaques.
- [19] Tanov Romil, Tabiei Ala. "A simple correction to the first –order shear deformation shell finite element formulation". *Finite Element in Analysis and Design* 35, (2000) 189-197.
- [20] Prever T, Seibi A.C, AL-Jahwari F.K.S. "Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory". *Composite Structures* 71, (2005) 414-422.
- [21] Desai Y.M., Ramtekkar G .S. Shah A.H. "Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element model". *Composite Structures* 59, (2003) 237-249.
- [22] Ambartsumyan S.A. "Theory of anisotropic plate". Technomic Publishing Co, 1969.

- [23] Panc V. "Theories of elastic plates". Noordho, Leyden, Netherlands, 1975.
- [24] Kaczkowski S.A. "Płyty obliczenia statyczne. Arkady". 2 edition, 1980.
- [25] Levinson M. "An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates". Mechanics Research Communication, vol. 7, pages 343-350, 1980.
- [26] Murthy M. "An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plate". Rapport Technique, NASA, 1981.
- [27] Reddy J.N. "A simple higher-order theory for laminated composite plates". Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [28] Cho, K. Kim & M. Kim . "Efficient high order shell theory for laminated composites". Composite structure (1996) 197-212.
- [29] Choa, Kimb. "A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element". Composites: Part B 31 (2000) 65–74.
- [30] M. Di Sciuva. "A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates". Atti. Accad. Sci. Torino, vol. 118, pages 279/295, 1984.
- [31] Murakami H. "Laminated composite plate theory with improved in-plane responses". Journal of Applied Mechanics. vol.53, pages 661-666, 1986.
- [32] Cho M. & R R. Parmerter. "efficient higher order composite plate theory for general lamination configuration". AIAA J., vol. 31, pages 1299-1306, 1993.
- [33] Averill R.C. "Static and dynamic response of moderately thick laminate beams with damage". Composite Eng., vol. 4, pages 381/395, 1994.
- [34] L.H. He. A linear theory of laminated shell accounting for continuity of displacement and transverse shear stresses at layer interfaces. Int J Solids Structures, vol. 31, no. 5, pages 613-627, 1994.
- [35] Icardi U. "Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations". Composite Structures : Part B, vol. 32, pages 343-354, 2001.

- [36] Icardi U. "A three-dimensional zig-zag theory for analysis of thick laminated beams". *Composite Structures*, vol. 52, pages 123-135, 2001.
- [37] Carrera E. "On the use of Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells". *Computers and Structures*, vol. 82, pages 541/554, 2004.
- [38] José Sunões Moita M. "Buckling behaviour of laminated composite structures using a discrete higher-order displacement model". *Composite Structures* 35 (1996) 15-92.
- [39] Patel B.P, Munot C.S, Gupta S.S, Sanbanson G.T., Ganapatthi M. "Application of higher-order finite element for elastic stability analysis of laminate cross-ply oval cylindrical shells". *Finite Elements in Analysis and Design* 40 (2004) 1083–1104.
- [40] Jin Gon KIM, Yoon Young KIM. "A new higher-order hybrid-mixed curved beam element". *International Journal for Numerical Method in Engineering* 43, 925-940 (1998).
- [41] Kant T., Swaminathan K. "Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory". *Composite Structures* 53(2001) 73-85.
- [42] Semedo-Garçao J.E., Mota Soares C.M, Mota Soares C.A., Reddy J.N. "Analysis of laminated adaptive plate structures using layerwise finite element models". *computers and Structures* 82 (2004) 1939-1959.
- [43] Nyak M, S.S.J.Moy, R.A.Shenoi. "A higher order finite element theory for buckling and vibration analysis of initially stressed composite sandwich plates". *Journal of Sound and Vibration* 286 (2005) 763–780
- [44] Rank M E, Duster A, Nubel V, Prensck K, Bruhns O.T. "high order finite elements for shells". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005) 2494–2512
- [45] Wu Z, Chen W "An efficient higher-order theory and finite element for laminated plates subjected to thermal loading". *Composite Structures* 73, (2006) 99–109.
- [46] Hirouyuki M, "Assessment of a global higher order deformation theory for laminated composite and Sandwich plates". *Composite Structures* 56 , (2002) 279–291.

- [47] Ao-Jun Shi, Xiao-Yang Lu and Huan-Ran Yu. "A new and unified approach for the formulation of multivariable finite elements". *Commun. Numer. Meth. Engng*, 15, 661-667 (1999).
- [48] Bishoff M. and RAMM E. "Shear deformable shell element for large strains and rotation". *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, Vol 40, 4427-4449 (1997).
- [49] Han Wanmin and Petyt M. "Linear vibration analysis of laminated rectangular plates using the hierarchical finite element method-I, Free Vibration Analysis". *Computers & Structures* Vol. 61, No. 4, pp. 705-712. 1996
- [50] Mindlin R.D. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates". *J.Appl.Mech.*, Vol 18, 31-38 (1951).
- [51] Reissner.E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [52] Cook R.D, Malkus D.S. & Plesha. M.E. "Concept and applications of finite element analysis". 3rd Ed., J Wiley 1989.
- [53] Bolle E. "Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique". *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, Vol.J3.P.281-285 et P. 293-298 (1947).
- [54] Bathe K.J et Dvorkin E.N. "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation". *INJME* 21, 367-383 (1985).
- [55] Bathe K.J et Dvorkin E.N. "A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components". *IJNME* 22, 697-722 (1986).
- [56] Pagano N.J., Hatfield S.J. "Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites". *AIAAJ*, Vol. 10, N°7, P.931-933, 1972.
- [57] Pagano, N.J. "Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates". *J.comp. Mech*, Vol.4, P.20-34,1970.
- [58] Engblom J.J., Ochoa O.O. "Through the thickness stress prediction for laminate plates

- of advanced composite materials". *Int. J.Num. Meth. Engng*, Vol. 21, p, 1759-1776, 1985.
- [59] Srinivas, S. "A refined analysis of composite laminates". *Journal of sound and vibration*, Vol 30, N°4, P.495-507, 1973.
- [60] Owen D.R.J., Figueiras J.A. "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells". *Int.J.Num, Meth.Engng.*, Vol.19, P.541-566,1983.
- [61] Plantema F.J. "Sandwich Construction". Wiley, New York, (1966).
- [62] Azar J.J. "Bending Theory for Multilayer Orthotropic Sandwich Plates". *AIAA Journal*, 6: 2166-2169, 1968.
- [63] Levinson M. "Free vibration of a simply supported, rectangular plate : an exact elasticity solution". *Journal of Sound and Vibrations* vol.98, P.289-298, 1985.
- [64] Reddy J.N. "Free vibration of antisymmetric, angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method". *Journal of Sound and Vibration*, Vol.66.P.565-576, 1979.
- [65] Aboura Z. "Etude du processus de délaminage modes I et II et modes mixtes, de matériaux composites à renfort tissé à différentes vitesses de sollicitation". Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1993
- [66] Aboura Z., Talbi N. et Ayad R. "Une méthode d'homogénéisation adaptée au carton ondulé". Rapport de recherche, Université de Technologie de Compiègne, juin 2002.
- [67] Talbi N. et Ayad R. "A efficient shell finite element based upon discrete Mindlin hypotheses for non linear structural analysis". *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM-V)*, Vienne, Autriche, 7-12 juillet 2002.
- [68] AYAD.R. "Contribution à la modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non Newtoniens. Application à des matériaux d'emballage". HDR, Université de Reims Champagne-Ardenne, soutenu en décembre 2002.
- [69] Batoz J.L. & Dhatt G, "Modélisation des structures par éléments finis ", Vol. 3 : Coques, Hermès Editeur, Paris 1992.

- [70] Pian T.H. et Sumihara K. "Rational approach for assumed stress finite elements". IJNME, Vol. 20, p. 1685-1695 (1984)
- [71] National Agency for Finite Element Methods and Standards (NAFEMS), U.K. " The Standard NAFEMS Benchmarks". TNSB, REV.3, October 1990.
- [72] Flügge W. "Stresses in shells". Springer Verla, (1960).
- [73] Linberg G.M., Olson M.D. & Cowper G.R. " New development in the finite element analysis of shells". Q. Bull Div. Mech. Eng. and Nat. Aeronautical Establishment, National Research council of Canada, Vol.4 (1969).
- [74] Mac Neal R. & Harder R.L. "A Proposed standard set of problems to test finite element accuracy". Finite Element Analysis Design, Vol. 1, p.3-20 (1985).
- [75] Batoz J.L. et Triki S. "Développement d'un élément fini de poutre vrillée". Rapport interne, UTC/LG2MS/MNM, Octobre 1991.
- [76] Batoz J.L et Katili I. " On simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints ". Int. J. Num. Meth. Eng. 35, 1603-1632 (1992).
- [77] E.F.Crawley, "the natural mode of graphites/ epoxy cantilever plates and shells". Composite Materials, 13,195-205,1979.
- [78] M.D Olson, G ,M Lindeberg. "Dynamic analysis of shallow shell with a doubly-curved triangular finite element". J.Sound Vib., 9,299-318, 1971 .
- [79] Rakesh Kumar Khare , Tarun Kant , Ajay Kumar Garg . "Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element". Composite Structures 65 (2004) 405–418
- [80] Bhimaraddi. "A. Free vibration analysis of doubly curved shallow shells on rectangular planform using three-dimensional elasticity theory". Int J Solids Struct 1991, 27(7):897–913.

- [ 81] Ren JG. "Analysis of simply supported laminated circular cylindrical shell roofs". Compos Struct 1989;11:277–92.
- [82] Varadan TK, Bhaskar K. "Bending of laminated orthotropic cylindrical shells-an elasticity approach". Compos Struct 1991, 17:141–56.
- [83] Batoz J.L., Quesnel. T. "Modélisation numérique du flambage de panneaux sandwich raidis". La construction navale en composite. Paris 7-9 décembre 1992.
- [84] Allaoui Samir, "Caractéristiques expérimentales et modélisation du comportement élastique d'une structure de type carton ondulé". DEA. Université de Technologie de Compiègne, 2001.

## **ANNEXES**

## Annexe A

### 1- Calcul de matrices $N_u, N_v, N_w, N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$ :

$$\begin{cases} \dot{U} = \langle N_u \rangle \{u_n\} \\ \dot{V} = \langle N_v \rangle \{u_n\} \\ \dot{W} = \langle N_w \rangle \{u_n\} \\ \dot{\theta}_x = \langle N_{\theta_x} \rangle \{u_n\} \\ \dot{\theta}_y = \langle N_{\theta_y} \rangle \{u_n\} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{cases} \langle N_u \rangle = \langle N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 ; & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 ; & \dots & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 ; & \dots & i=1,4 \rangle \\ \langle N_v \rangle = \langle 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 ; & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 ; & \dots & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 ; & \dots & i=1,4 \rangle \\ \langle N_w \rangle = \langle 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 ; & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 ; & \dots & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 ; & \dots & i=1,4 \rangle \\ \langle N_{\theta_x} \rangle = \langle 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 ; & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 ; & \dots & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 ; & \dots & i=1,4 \rangle \\ \langle N_{\theta_y} \rangle = \langle 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 ; & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 ; & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i ; & \dots & i=1,4 \rangle \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

### 2- calcul de $\{\tau\}$ :

$$\tau_{xz} = -\int_{-t}^z (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) dz ; \quad \tau_{yz} = -\int_{-t}^z (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dz \quad (\text{A.3})$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{2z}{h} \langle \sigma_1 \rangle = z[A][M] \quad (\text{A.4})$$

avec

$$\langle M \rangle = \langle M_x \quad M_y \quad M_{xy} \rangle ; \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Nous faisons les dérivés nécessaires de  $\{\sigma\}$  equ(A.4) pour calculer  $\{\tau\}$ , nous obtenons :

$$\sigma_{x,x} = z(A_{11}M_{x,x} + A_{12}M_{y,x} + A_{13}M_{xy,x}) ; \quad \tau_{xy,y} = A_{31}M_{x,y} + A_{32}M_{y,y} + A_{33}M_{xy,y} \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{y,y} = z(A_{21}M_{x,y} + A_{22}M_{y,y} + A_{23}M_{xy,y}) ; \quad \tau_{xy,x} = z(A_{31}M_{x,x} + A_{32}M_{y,x} + A_{33}M_{xy,x}) \quad (\text{A.6})$$

Nous remplaçons ces dérivés eqs (A.5, A.5) dans l'équation (A.3), nous aboutissons à :

$$\tau_{xz} = -\int_{-t}^z z(A_{11}M_{x,x} + A_{12}M_{y,x} + A_{13}M_{xy,x} + A_{31}M_{x,y} + A_{32}M_{y,y} + A_{33}M_{xy,y}) dz \quad (\text{A.7})$$

$$\tau_{yz} = -\int_{-t}^z z(A_{21}M_{x,y} + A_{22}M_{y,y} + A_{23}M_{xy,y} + A_{31}M_{x,x} + A_{32}M_{y,x} + A_{33}M_{xy,x}) dz \quad (\text{A.8})$$

Nous rédéfinissons les équations (A.7) et (A.8) sous la forme suivante :

$$\tau_{xz} = -\int_{-t}^z \frac{z}{2} \langle \langle A_{11} + A_{33} \quad A_{13} + A_{32} \rangle \{T\} + \langle A_{11} - A_{33} \quad A_{13} - A_{32} \quad 2A_{12} \quad 2A_{31} \rangle \{\lambda\} \rangle dz \quad (\text{A.9})$$

$$\tau_{yz} = - \int_{-t}^z \frac{z}{2} \left( \langle A_{31} + A_{23} \quad A_{22} + A_{33} \rangle \{T\} + \langle A_{31} - A_{23} \quad A_{33} - A_{22} \quad 2A_{32} \quad 2A_{21} \rangle \{\lambda\} \right) dz \quad (\text{A.10})$$

avec

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} M_{x,x} + M_{xy,y} \\ M_{xy,x} + M_{y,y} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

l'expression de  $\{T\}$  est déduite de l'équation d'équilibre

$$\langle \lambda \rangle = \langle M_{x,x} - M_{xy,x} ; M_{xy,x} - M_{y,y} ; M_{y,x} ; M_{x,y} \rangle \quad (\text{A.12})$$

nous définissons finalement  $\{\tau\}$  en considérant  $[D_1]$  et  $[D_2]$

Alors,

$$\{\tau_1\} = [D_1] \{T\} + [D_2] \{\lambda\} \quad (\text{A.13})$$

avec ;

$$[D_1] = \int_{-t}^z \frac{z}{2} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{33} & A_{13} + A_{32} \\ A_{31} + A_{23} & A_{22} + A_{33} \end{bmatrix} dz, \quad [D_2] = \int_{-t}^z \frac{-z}{2} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{33} & A_{13} - A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31} \\ A_{31} - A_{23} & A_{33} - A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21} \end{bmatrix} dz \quad (\text{A.14})$$

## Annexe B

### 1- Expression de la matrice $[B_{cs}]$ pour une plaque :

$$B_{cs} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{x_2 - x_1}{2} & \frac{y_2 - y_1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x_2 - x_1}{2} & \frac{y_2 - y_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{x_3 - x_2}{2} & \frac{y_3 - y_2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x_3 - x_2}{2} & \frac{y_3 - y_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{x_3 - x_4}{2} & \frac{y_3 - y_4}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{x_3 - x_4}{2} & \frac{y_3 - y_4}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{x_4 - x_1}{2} & \frac{y_4 - y_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{x_4 - x_1}{2} & \frac{y_4 - y_1}{2} \end{bmatrix}$$